Erste Programmieraufgabe:

Implementieren Sie das Finite-Differenzen-Verfahren in MATLAB und lösen Sie (P) numerisch für

$$f(x,y) = \sin(\pi x y)\,\pi^2 (x^2+y^2)$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x=0 \text{ oder } y=0 \\ \sin(x\pi) & \text{für } y=1 \\ \sin(y\pi) & \text{für } x=1 \end{cases}$$

Exakte Lösung: $u(x,y) = \sin(\pi x y)$ (nachrechnen!)

Nützliche Befehle: 9

- Definition von A_h: diag, kron, eye

  $\cancel{\mathrm{kron}(\mathrm{eye}(j), B) = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}}$

- Definition von f: meshgrid
- Aufstellen der rechten Seite: b = reshape(beta, [], 1)
- Lösung des LGS: u = - A\b

  U = reshape(u, N-1, N-1)

  Matrix ... Vektor

- Visualisierung: mesh, contour, subplot, loglog

10

Programmstruktur:

Fehler

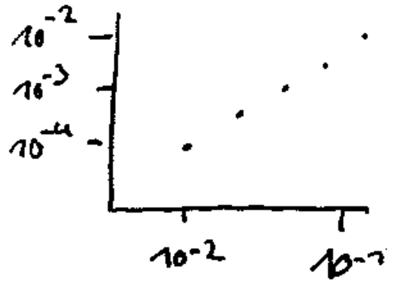
err

function [u, uex, err] = solvepde(N, plotresult)

num. Approx ... exakte Lösung

~~x = y = (h, 2h, 3h, ..., (N-1)h, Nh)~~

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten, indem Sie den Approximationsfehler in der sup-Norm für verschiedene N bestimmen und in logarithmischen Achsen plotten:



Fehler $= O(h^2)$

Matlab-Befehl: loglog

(11)

Vorteile von Finiten Differenzen:

- Konzeptuell einfach (Theorie und Implementierung)

Nachteile:

- Anpassung an allgemeine Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ist mühsam
- Diskretisierungsmatrix ist im allgemeinen nicht symmetrisch und negativ bzw. positiv definit
- Starke Regularitätsvoraussetzungen. Konvergenzbeweise unter realistischen Voraussetzungen sind sehr mühsam.
  Beispiel: Braess S.24, Beispiel 4.6.

Diese Nachteile können durch die Methode der finiten Elemente weitgehend behoben werden.

---

(12)

2. Schwache Lösungen elliptischer Randwertprobleme

2.1. ~~Das~~ Grundprinzip und Motivation

Modellproblem: Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbed.

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Dabei sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet (d.h. offen, zusammenhängend, nicht leer) mit „glattem" Rand Γ

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktion

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ unbekannte Lösung

Δ Laplace-Operator, d.h. $\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}^2 u$

Bezeichnungen:

- $C^k(\Omega) = C^k(\Omega, \mathbb{R}) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R},\ v \text{ k-mal stetig differenzierbar} \}$
- $C_c^k(\Omega) = \{ v \in C^k(\Omega) \text{ und } \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}} \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega \}$

Lemma 2.1 (Greensche Formel)

Sei $v, w \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt für jedes $i = 1, \dots, d$

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} v(x))\, w(x)\, dx = \int_\Gamma v(x) w(x) \eta_i(x)\, d\sigma(x) - \int_\Omega v(x)\, \partial_{x_i} w(x)\, dx$$

Dabei ist $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_d(x))^T$ der äußere Normalenvektor im Punkt $x \in \Gamma$.

Bemerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung der partiellen Integration

$$\int_a^b v'(x) w(x)\, dx = \Big[v(x) w(x) \Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b v(x) w'(x)\, dx$$

für $d = 1$ und $\Omega = (a, b)$.

Herleitung der variationellen Formulierung: Multipliziere die PDE mit einer Testfunktion $v \in C_c^1(\Omega)$, integriere und wende Green an.

$$-\Delta u = f \Rightarrow -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega (\partial_{x_i}^2 u(x))\, v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \underbrace{-\sum_{i=1}^{d} \int_\Gamma (\partial_{x_i} u(x))\, v(x) \eta_i(x)\, d\sigma}_{= 0 \text{ da } v \in C_c^1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega (\partial_{x_i} u(x))(\partial_{x_i} v(x))\, dx$$

15

Erhalte also

$$\text{(2.2)} \quad a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in C_c^1(\Omega)$$

mit Bilinearform $\quad a(u,v) := \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \big(\partial_{x_i} u(x)\big)\big(\partial_{x_i} v(x)\big)\, dx$

und Linearform $\quad \ell(v) := \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx$

Falls $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ist, sind (2.1) und (2.2) äquivalent.

Aber: In (2.2) treten nur <u>erste</u> Ableitungen auf. Brauche weniger Regularität.

16

Ansatz für die Konstruktion von numerischen Verfahren:

Gehe nicht von (2.1) aus, sondern von (2.2), d.h.
Suche $u \in V$ derart, dass

$$a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V \qquad \text{(}V\text{ geeigneter Vektorraum, Details später)}$$

Numerische Approximation: Wähle N-dimensionalen Unterraum $V_N \subseteq V$ und suche $u_N \in V_N$ derart dass

$$a(u_N, v_N) = \ell(v_N) \qquad \forall v_N \in V_N$$

~~Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis von V_N, $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$~~

~~$\Rightarrow u_N = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi_i$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$, $v_N = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \varphi_i$ mit $\nu_i \in \mathbb{R}$~~

Bemerkung: Wenn man V und V_N „richtig" wählt, dann ist die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sogar ein Skalarprodukt.

Wegen

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \quad , \quad V_N \subseteq V$$

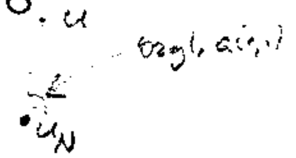
folgt insbesondere

$$a(u,v_N) = \ell(v_N) \quad \forall v \in V_N$$

und damit

$$a(u-u_N, v_N) = a(u,v_N) - a(u_N,v_N) = \ell(v_N) - \ell(v_N) = 0$$

für alle $v_N \in V_N$. Der Fehler $u-u_N$ ist also orthogonal bezüglich $a(\cdot,\cdot)$ zum Ansatzraum V_N.



$\Rightarrow$ Galerkin-Bedingung

Sei nun $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis von V_N, d.h. $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$.
Es gibt also $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$ und $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_N$ derart, dass

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i \varphi_i \quad \text{und} \quad v_N = \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i \varphi_i$$

Setze ein und verwende (Bi-)Linearität:

$$a(u_N,v_N) = a\Big(\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i\varphi_i , \sum_{j=1}^{N} \hat{v}_j \varphi_j\Big) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \hat{u}_i \hat{v}_j \underbrace{a(\varphi_i,\varphi_j)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\|$$

$$\ell(v_N) = \ell\Big(\sum_{j=1}^{N} \hat{v}_j \varphi_j\Big) = \sum_{j=1}^{N} \hat{v}_j \underbrace{\ell(\varphi_j)}_{\in \mathbb{R}} \qquad \forall v_N \in V_N$$

bzw. $\forall \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_N$

Matrix-Vektor-Notation:

$$(2.3) \qquad \hat{v}^T A \hat{u} = \hat{v}^T b \qquad \forall\, \hat{v} \in \mathbb{R}^N$$

mit $\hat{v} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_N \end{pmatrix}$, $\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_N \end{pmatrix}$, $A = \big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $b = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{pmatrix}$

(2.3) gilt insbesondere für $\hat{v} = e_k := (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0)^T$.

Also ist (2.3) äquivalent zum linearen Gleichungssystem (LGS)

$$A\hat{u} = b.$$

Hat das LGS eine Lösung?

Nach Definition ist $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch, d.h. $a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i)$

$\Rightarrow A = A^T$ symmetrisch.

Falls $a(v,v) > 0 \;\; \forall\, v \in V, v \neq 0$ ist A positiv definit.

Dann existiert also eine eindeutige Lösung $\hat{u}$ des LGS.

Erhalte u_N aus $u_N = \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i \varphi_i$.

19.4

Vorsicht mit dem Begriff „Raumdiskretisierung"!

$u_N : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, aber $\hat{u} \in \mathbb{R}^N$ ist ein Vektor.

Wichtige Fragen: Wie wählt man V und V_N?

Antwort später.