2.2. Existenz schwacher Lösungen und Sobolevräume

Erinnerung: Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum, falls V bezüglich $\|\cdot\|$ vollständig ist, d.h. falls jede Cauchy-Folge in V konvergiert.

Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt Hilbertraum, falls $(V, \|\cdot\|)$ mit $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ ein Banachraum ist.

Definition 2.2 (V-elliptische Bilinearform)

Eine symmetrische Bilinearform $a : V\times V \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt <u>V-elliptisch</u>, falls es

(i) ein $\alpha > 0$ gibt mit $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 = \alpha\langle v,v\rangle \quad \forall v \in V$, und

(ii) ein $M < \infty$ gibt mit $|a(u,v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u,v \in V$

22

Bemerkungen

1. $a(\cdot,\cdot)$ heißt symmetrisch, falls $a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in V$.
2. (ii) $\Rightarrow$ $a : V\times V \to \mathbb{R}$ ist stetig. (i) + (ii) $\Rightarrow$ $a : V\times V \to \mathbb{R}$ ist <u>koerziv</u>.
3. Ist $a : V \times V \to \mathbb{R}$ V-elliptisch, so gilt
$$M\|v\|^2 \geq |a(v,v)| \geq a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2.$$
Also ist $a(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt, und die Normen
$$\|v\|_a := \sqrt{a(v,v)} \qquad \text{und} \qquad \|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$$
sind äquivalent. Also ist $(V, a(\cdot,\cdot))$ ebenfalls ein Hilbertraum.

Satz 2.3 (Lax-Milgram)

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $a: V\times V\to\mathbb{R}$ elliptisch, $\ell: V\to\mathbb{R}$ eine stetige Linearform (d.h. $|\ell(v)| \le C\|v\| = C\sqrt{\langle v,v\rangle}$).
Dann hat das Problem

$$\text{Finde ein } u\in V \text{ mit } a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v\in V$$

eine eindeutige Lösung $u\in V$.

Problem: Die klassischen Funktionenräume $C^k(\Omega)$ oder $C^k_c(\Omega)$ sind nicht vollständig, d.h. keine Hilberträume.
Brauche Sobolevräume.

24

Definition 2.4 (L^p-Räume)

Für $1\le p<\infty$ sei

$$L^p(\Omega) := \left\{ u:\Omega\to\mathbb{R} : u \text{ ist messbar und } \int_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \right)^{1/p} \qquad \text{für } u\in L^p(\Omega)$$

Für $p=2$ und $u,v\in L^2(\Omega)$ sei

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx, \qquad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{L^2(\Omega)}}$$

Dabei ist „$\int \dots dx$" das Lebesgue-Integral
Die Elemente von $L^p(\Omega)$ werden meist als „Funktionen" bezeichnet, sind aber eigentlich Äquivalenzklassen von Funktionen:

$u,v\in L^p(\Omega)$ äquivalent $\iff$ $u=v$ fast überall (d.h. bis auf Nullmengen)

Satz 2.5

$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ ist eine Norm auf $L^p(\Omega)$, und $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ist ein Banachraum.

$(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ ist ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ und $(L^2(\Omega), (\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)})$ ist ein Hilbertraum.

Notation: Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ sei

$$\partial^\alpha u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} u$$

Definition 2.6 (schwache Ableitung)

Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}$, u messbar und lokal integrierbar, d.h. $u \in L^1(K)$ für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega\}$.

Dann heißt u schwach differenzierbar nach x_i ($i \in \{1, \dots, d\}$), falls es ein $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt so dass

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_{x_i} \phi(x)\, dx = -\int_\Omega v(x)\, \phi(x)\, dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Die Funktion v heißt schwache partielle Ableitung von u. Notation: $v = \partial_{x_i} u$.
Höhere schwache Ableitungen: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist $v = \partial^\alpha u$ schwache partielle Ableitung von u, falls

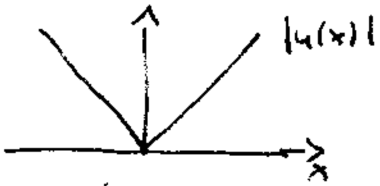
$$\int_\Omega u(x)\, \partial^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \int_\Omega v(x)\, \phi(x)\, dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Beispiele:

1. Sei $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, d.h. $\partial_{x_i} u \in C(\Omega)$ $\forall i = 1, \dots, d$.
Greensche Formel (Lemma 2.1):

$$\int_\Omega (\partial_{x_i} u(x))\, \phi(x)\, dx = \int_\Gamma u(x) \underbrace{\phi(x)}_{=0 \text{ auf } \Gamma} \nu_i(x)\, d\sigma(x) - \int_\Omega u(x)\, \partial_{x_i} \phi(x)\, dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$\Rightarrow$ u ist schwach differenzierbar
klassische = schwache Ableitung



2. Betrachte $u(x) = |x|$ auf $\Omega = (-1, 1)$.
u ist nicht klassisch differenzierbar, aber schwach differenzierbar mit Ableitung

$$v(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

28

denn es gilt $\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{-1}^{1} u(x) \phi'(x)\, dx = \int_{-1}^{0} u(x) \phi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} u(x) \phi'(x)\, dx$$

$$\overset{\text{partielle Integration}}{=} \Big[u(x)\phi(x)\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\cdot \phi(x)\, dx + \Big[u(x)\phi(x)\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 1 \cdot \phi(x)\, dx$$

$$= -u(-1)\underbrace{\phi(-1)}_{=0} + u(1)\underbrace{\phi(1)}_{=0} - \int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)\, dx.$$

Ebenso ist

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$$

eine schwache Ableitung von u.

3. Sei: $\Omega = (-1, 1)$ und

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Dann ist u nicht schwach differenzierbar (Widerspruchsbeweis)

Satz 2.7 (Eindeutigkeit von schwachen Ableitungen)

Sei: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und seien $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache partielle Ableitungen von u nach x_i. Dann gilt

$$v = \tilde{v} \quad \text{fast überall.}$$

Entsprechend für höhere Ableitungen.

Definition 2.8 (Sobolev-Raum $H^m(\Omega)$)

Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist der Sobolevraum $H^m(\Omega)$ definiert durch

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ für alle } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } \sum_{i=1}^d \alpha_i \le m \right\}$$

$$H^m(\Omega) \subseteq L^2(\Omega), \quad H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

Auf $H^m(\Omega)$ ist durch

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \le m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

ein Skalarprodukt definiert, das die Norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^m(\Omega)}}$$

induziert.

Beispiel: Für $m=1$ ist

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}$$

mit der Sobolev-Halbnorm

$$|u|_{H^1(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^{d} \|\partial_{x_i} u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

<u>Satz 2.9</u>

Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\left(H^m(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^m(\Omega)} \right)$ ein Hilbertraum.

<u>Satz 2.10</u>

Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$C^{\infty,m}(\Omega) := \left\{ v \in C^\infty(\Omega) : \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2 dx < \infty \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leq m \right\}$$

$H^m(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C^{\infty,m}(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$, d.h. der kleinste vollständige Raum (bzgl. $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$), der $C^{\infty,m}(\Omega)$ enthält.

Folgerung: Für jedes $v \in H^m(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v_\varepsilon \in C^{\infty,m}(\Omega)$ derart, dass $\|v_\varepsilon - v\|_{H^m(\Omega)} < \varepsilon$.

Definition 2.11 (Sobolev-Raum $H_0^m(\Omega)$)

Der Sobolev-Raum $H_0^m(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. Das bedeutet:

$v \in H_0^m(\Omega) \iff$ Es gibt eine Folge $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|_{H^m(\Omega)} = 0$$

$H_0^m(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^m(\Omega)$.

$\Rightarrow$ $\left(H_0^m(\Omega),\ (\cdot,\cdot)_{H^m(\Omega)}\right)$ ist ein Hilbertraum.

Bemerkung: Für beschränkte, C^1-berandete Gebiete Ω gilt

$$v \in C(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \implies v(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma$$