4. Variationelle Formulierung von allgemeinen Randwertproblemen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand Γ!
Betrachte allgemeinen Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$\mathcal{A}u(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\,\partial_{x_j}u(x)\right) + a_0(x)u(x)$$

Die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}: \Omega \to \mathbb{R}$, $a_0: \Omega \to \mathbb{R}$ haben die Eigenschaften

(i) $|a_0(x)|, |a_{ij}(x)| \leq M \quad \forall x \in \Omega$

(ii) $a_{ij} = a_{ji}$

(iii) Es gibt Konstanten $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0 \geq 0$ derart, dass

- $\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha_1 \sum_{i=1}^{d}\xi_i^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^d$
- $a_0(x) \geq \alpha_0 \quad \forall x \in \Omega$

Ein Differentialoperator mit den Eigenschaften (ii) und (iii) heißt elliptisch.

Beispiel: Wenn $a_0(x) \equiv 0$ und $a_{ij}(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, dann ist

$$\mathcal{A} = -\Delta$$

(a) Homogene Dirichlet-Randbedingungen

Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit $f \in C^2(\Omega)$. Multipliziere mit Testfunktion $v \in C_c^\infty(\Omega)$, integriere über Ω, wende Greensche Formel an und erhalte

$$a(u,v) := \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega a_{ij}(x)\, \partial_{x_j} u(x) \cdot \partial_{x_i} v(x)\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$$

$$= \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx =: \ell(v)$$

Variationelle (schwache) Formulierung: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

(4.1) $\quad a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

u heißt <u>schwache Lösung</u> des Randwertproblems.

Die Randbedingungen wird durch die Wahl des Lösungsraums $H_0^1(\Omega)$ erfüllt. („wesentliche Randbedingung")

Kann zeigen: (4.1) hat eine eindeutige Lösung (weise Voraussetzungen von Lax-Milgram nach).

50

(b) Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad &&\text{in } \Omega \\ u &= g &&\text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Problem: Interpretation der Randbedingung in $H^1(\Omega)$? Rand ist Nullmenge.

<u>Satz 4.1 (Spursatz)</u>

Falls Γ hinreichend regulär ist, gibt es eine beschränkte (stetige) lineare Abbildung

$$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

$$\|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma)} \le c \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

mit $c > 0$ derart, dass

$$\gamma(v) = v|_\Gamma \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

Bemerkung: Es gilt $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0\}$

Zurück zum Randwertproblem.

Annahme: Es gibt ein $u_* \in H^1(\Omega)$ derart, dass $g = u_*\big|_\Gamma = \gamma(u_*)$ im Sinne des Spursatzes.

$\Rightarrow \quad w := u - u_* \in H_0^1(\Omega)$

Variationelle Formulierung: Suche $u \in H^1(\Omega)$ derart, dass $u - u_* \in H_0^1(\Omega)$ und

$$(4.2) \qquad a(u,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(Herleitung wie in (a))

Äquivalent: Suche $w \in H_0^1(\Omega)$ derart, dass

$$(4.3) \qquad a(w,v) = \ell(v) - a(u_*,v) =: \tilde{\ell}(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Lax-Milgram $\Rightarrow$ eindeutige Lösung existiert.

(c) Homogene Neumann-Randbedingungen

Betrachte nun das Randwertproblem

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

mit Konormalen-Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\,\partial_{x_j} u(x)\, \eta_i(x) \quad , \qquad A(x) := \big(a_{ij}(x)\big)_{i,j}$$

Falls $a_0(x) \equiv 0$ ist, ist die Lösung nicht eindeutig. Sei u Lösung und $\tilde{u}(x) = u(x) + c$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\tilde{u} = \mathcal{L}u = f \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta_A} = \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = 0 \;, \text{ da } \partial_{x_i}\tilde{u} = \partial_{x_i} u .$$

Setze also voraus, dass $a_0(x) \geq \alpha_0 > 0$ (statt $\alpha_0 \geq 0$)

Variationelle Formulierung: Für hinreichend reguläre u, v, a_{ij} gilt

$$\ell(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx = \int_\Omega (Lu)(x)\, v(x)\, dx$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \Big(\partial_{x_i}\big(a_{ij}(x)\, \partial_{x_j} u(x)\big) \Big) v(x)\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$$

$$\overset{\text{Green}}{=} -\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Gamma \big(a_{ij}(x)\, \partial_{x_j} u(x)\big) v(x)\, \eta_i(x)\, d\sigma(x)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \big(a_{ij}(x)\, \partial_{x_j} u(x)\big) \partial_{x_i} v(x)\, dx + \int_\Omega a_0(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$$

$$= -\int_\Gamma \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta_L}(x)}_{=0 \text{ auf } \Gamma} v(x)\, d\sigma(x) + a(u,v) = a(u,v)$$

In (a) verschwand das Randintegral, weil dort $v \in H_0^1(\Omega)$ vorausgesetzt wurde. Jetzt verschwindet das Randintegral wegen der homogenen Neumann-Randbedingung. Wähle also nun $H^1(\Omega)$ statt $H_0^1(\Omega)$ in der Variationellen Formulierung:

Suche $u \in H^1(\Omega)$ derart, dass

(4.4) $\quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

Die Randbedingungen treten in der variationellen Formulierung nicht explizit auf („natürliche Randbedingungen").

Lax-Milgram $\Rightarrow$ eindeutige Lösung

(d) Inhomogene Neumann-Randbedingungen

Betrachte nun

$$\mathcal{A}u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = g \quad \text{auf } \Gamma$$

Rechnung wie in (c) liefert

$$\ell(v) = -\int_\Gamma \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta_A}(x)}_{= g(x) \text{ auf } \Gamma} v(x)\, d\sigma(x) + a(u,v)$$

$$\Rightarrow a(u,v) = \ell(v) + \int_\Gamma g(x) v(x)\, d\sigma(x) =: \tilde{\ell}(v)$$

Variationelle Formulierung: Finde $u \in H^1(\Omega)$ derart, dass

(4.5) $\quad a(u,v) = \tilde{\ell}(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

Die Randbedingung geht hier also (ähnlich wie in (b)) in die Linearform $\tilde{\ell}$ ein.

(e) Poisson-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen

(4.6) $$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\eta u &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

$$\partial_\eta u = \partial_{\eta_I} u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} u(x) \eta_i(x)$$

Dies ist ein Spezialfall von (d) mit $a_0(x) \equiv 0$, $a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$

Wissen: Keine eindeutige Lösung, da nun $a_0(x) \equiv 0$.
$u(x)$ Lösung $\Rightarrow u(x) + c$ Lösung.

Idee: Lege den zusätzlichen Freiheitsgrad fest. Wähle als Ansatzraum

$$V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega v(x)\,dx = 0 \right\}$$

Variationelle Formulierung (vgl. (c) bzw (d)): Finde $u \in V$ derart, dass

$$(4.7) \qquad a(u,v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,dx + \int_\Gamma g(x)\,v(x)\,d\sigma(x) =: \tilde{\ell}(v) \quad \forall\, v \in V$$

mit $a(u,v)$ wie oben, aber mit $a_0(x) \equiv 0$.

Man kann zeigen, dass $a(\cdot,\cdot)$ V-elliptisch ist (aber nicht H^1-elliptisch wegen $a_0(x) \equiv 0$).

Lax-Milgram: (4.6) hat eindeutige Lösung in V.

58

Sei nun $\tilde{v} = v + c$, , $c \neq 0$, $\tilde{v} \in H^1(\Omega) \setminus V$.

$$a(u,\tilde{v}) = a(u,v) = \tilde{\ell}(v)$$
$$= \ell(\tilde{v}) - c\left(\int_\Omega f(x)\,dx + \int_\Gamma g(x)\,d\sigma(x) \right)$$

Falls die Kompatibilitätsbedingung

$$(4.8) \qquad \int_\Omega f(x)\,dx + \int_\Gamma g(x)\,d\sigma(x) = 0$$

erfüllt ist, gilt (4.7) sogar für alle $v \in H^1(\Omega)$ und man kann dann zeigen, dass jede Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (4.7) auch ein klassische Lösung von (4.6) ist.

Bemerkung: (4.8) folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz.