(δ) Gemischte Randbedingungen

Teile den Rand Γ in zwei Teile Γ_D und Γ_N auf ($\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$,). Setze Dirichlet-Randbedingung auf Γ_D und Neumann-Randbedingung auf Γ_N:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} u &= f \quad \text{in } \Omega \\
u &= g_D \quad \text{auf } \Gamma_D \\
\frac{\partial u}{\partial \nu_A} &= g_N \quad \text{auf } \Gamma_N
\end{aligned}
$$

Variationelle Formulierung:
Zerlege $u = w + u_*$ mit $u_* \in H^1(\Omega)$ und $u_*|_{\Gamma_D} = g_D$
Finde $w \in H^1_D(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega) : w = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}$ mit

$$\cancel{a(w,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\Gamma_N} g_N(x,y)v(x,y)\,d\sigma(x,y) - a(u_*,v) =: \ell(v) \quad \forall v \in H^1_D(\Omega)}$$

~~Verallgemeinerung von (a)-(d).~~

$$a(w,v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx + \int_{\Gamma_N} g_N(x)v(x)\,d\sigma(x) - a(u_*,v) \quad \forall v \in H^1_D(\Omega)$$

Verallgemeinerung von (a) - (d)

5. Lineare Finite Elemente für allgemeine Randwertprobleme

Betrachte Modellproblem aus 4.(f) in $d=2$ Raumdimensionen.
Schreibe (x,y) statt (x_1,x_2) und $\kappa_{ij}(x,y)$, $\kappa_0(x,y)$ statt $a_{ij}(x)$, $a_0(x)$, d.h.

$$a(u,v) := \int_\Omega (\nabla v)^T \kappa \nabla u \, d(x,y) + \int_\Omega \kappa_0 u v \, d(x,y)$$

$$\kappa = \kappa(x,y) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(x,y) & \kappa_{12}(x,y) \\ \kappa_{21}(x,y) & \kappa_{22}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \kappa_0 = \kappa_0(x,y)$$

$$\ell(v) := \int_\Omega f v \, d(x,y) + \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\sigma(x,y) - a(u_*, v)$$

$$a(w,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in H^1_D(\Omega)$$

$$u = w + u_*$$

(c) Steifigkeitsmatrix

$$a(\varphi_i,\varphi_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{T_k}(\varphi_i,\varphi_j) \quad \text{mit}$$

$$a_{T_k}(\varphi_i,\varphi_j) = \int_{T_k} (\nabla\varphi_i)^T \kappa \nabla\varphi_j \, d(x,y) + \int_{T_k} \kappa_0 \varphi_i \varphi_j \, d(x,y)$$

Berechne $\nabla\varphi_i$ und φ_i wie in 3.(c). Approximiere Integrale durch Quadratur:

$$\int_{T_k} F(x,y) \, d(x,y) \approx |T_k| \cdot F(x_*^k, y_*^k)$$

mit Schwerpunkt $(x_*^k, y_*^k) = \frac{1}{3}(P_1^k + P_2^k + P_3^k)$. Es gilt $\varphi_i(x_*^k, y_*^k) = \frac{1}{3}$ für $i=1,2,3$, vgl. 3.(c).

(5) Lastvektor und Randbedingungen

Berechnung von $\int_\Omega f(x,y)\varphi_i(x,y)\,d(x,y)$ wie in 3.(c).

Voraussetzungen für die Triangulierung bzw. Randbedingungen:

- $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$
- $\Gamma_D \cap \Gamma_N$ besteht nur aus Ecken von Dreiecken
- Für alle k und $i \neq j \in \{1,2,3\}$ gilt

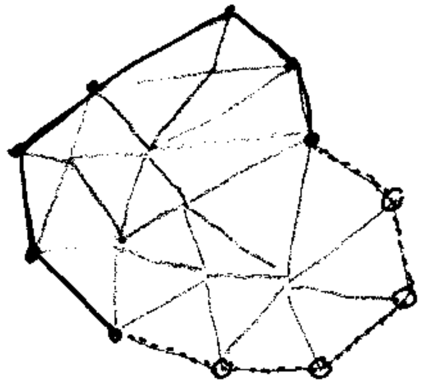
  entweder $[P_i^k, P_j^k] \subseteq \Gamma_D$ („constrained edge")

  oder $[P_i^k, P_j^k] \subseteq \Gamma_N$ („free edge")

  oder mindestens eine der beiden Ecken liegt nicht auf dem Rand.

Notation: $[P_i^k, P_j^k]$ = Kante zwischen P_i^k und P_j^k

P_i heißt freier Randpunkt, falls $P_i \in \Gamma \setminus \Gamma_D$.



——— Γ_D $\quad \bullet \in \Gamma_D$

.... Γ_N $\quad \circ \in \Gamma \setminus \Gamma_D$ frei

Werte in $\bullet$ sind durch g_D vorgegeben.

Dirichlet-Randbedingung: Wähle $u_* \in H^1(\Omega)$ derart, dass $u_*\big|_{\Gamma_D} = g_D$

Einfachste Wahl (für lineare Elemente):

Wähle u_* stückweise linear mit

$$u_*(P_k) = \begin{cases} g_D(P_k) & \text{falls } P_k \in \Gamma_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u_*(x,y) = \sum_{P_i \in \Gamma_D} g_D(P_i)\varphi_i(x,y)$$

Für $(x,y) \in T_k$: $\quad u_*(x,y) = \sum_{P_i^k \in \Gamma_D} g_D(P_i^k)\varphi_i^k(x,y)$

Modifiziere die entsprechenden Einträge des Lastvektors:

$$\ell(\varphi_i) = \ldots - a(u_*, \varphi_i)$$

Berechne $a(u_*, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{T_k}(u_*, \varphi_i)$ wie in (a).

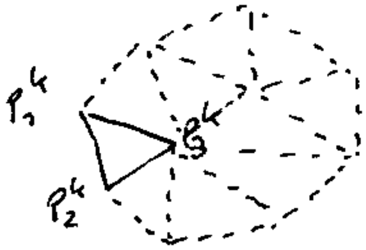
~~Neumann-Randbedingung:~~

~~Muss Randintegral $\int_{\Gamma_N} g_N \varphi_j \, d\sigma(x,y)$ berechnen.~~

Neumann-Randbedingung

Muss man $\int_{\Gamma_N} g_N \varphi_j \, d\sigma(x,y)$ berechnen.

Sei T_k ein Dreieck mit Ecken P_1^k, P_2^k, P_3^k, wobei $P_1^k, P_2^k \in \Gamma_N$.



Notation: $[P_i^k, P_j^k]$ Kante zwischen P_i^k und P_j^k

Sei φ_j^k mit P_j^k assoziiertes Basiselement. Approximiere

$$\int_{[P_1^k, P_2^k]} g_N(x,y)\, \varphi_j^k(x,y)\, d\sigma(x,y) \approx \| P_1^k - P_2^k \|_2 \cdot g_N\!\left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}\right) \underbrace{\varphi_j^k\!\left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}\right)}_{= \begin{cases} 1/2 & \text{für } j = 1,2 \\ 0 & \text{für } j = 3 \end{cases}}$$

Zusammenfassung: Der Beitrag von φ_j^k auf T_k zum Lastvektor ist

$$\int_{T_k} f(x,y)\,\varphi_j^k(x,y)\,d(x,y) + \sum_{\substack{i\in\{1,2,3\}\\ [P_i^k,P_j^k]\in\Gamma_N}} \int_{[P_i^k,P_j^k]} g_N(x,y)\,\varphi_j^k(x,y)\,d\sigma(x,y)$$

$$- \sum_{\substack{i\in\{1,2,3\}\\ P_i^k\in\Gamma_D}} g_D(P_i^k)\,a_{T_k}(\varphi_i^k,\varphi_j^k)$$

mit Approximation der Integrale durch Quadraturformeln.

(c) Implementierung in Matlab

Algorithmus für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix A und des Lastvektors b

Eingabe: T, P, EdgesDir, EdgesNeu (wie in 3. (e))
Ausgabe: A, b, Tarea

for $k = 1:m$ (m = Anzahl der Dreiecke)

Berechne $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ so, dass
$\varphi_i^k(x,y) = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \quad \forall (x,y)\in T_k, \quad i = 1,2,3$ (vgl. 3(a))

Approximiere $\tilde{a}_{ij} \approx a_{T_k}(\varphi_i^k,\varphi_j^k)$ durch Quadraturformel
($i,j = 1,2,3$)