(69)

Addiere das Ergebnis zu den entsprechenden Einträgen der Steifigkeitsmatrix hinzu:

$$a_{\psi(i),\psi(j)} = a_{\psi(i),\psi(j)} + \tilde{a}_{ij}$$

ψ wie in 3. (e), d.h. $\varphi_i^k = \varphi_{\psi(i)}$, $P_i^k = P_{\psi(i)}$

$T(k,:) = [\psi(1), \psi(2), \psi(3)]$

~~...~~ Berechne $\tilde{b}_j := \frac{1}{3} |T_k| \, f(x_*^k, y_*^k) \approx \int_{T_k} f(x,y)\varphi_j(x,y)\, d(x,y)$

für $j = 1, 2, 3$

Wenn $\{P_1^k, P_2^k, P_3^k\} \cap \Gamma_D \neq \emptyset$ $\quad (*)$

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j - \sum_{\substack{i \in \{1,2,3\} \\ P_i^k \in \Gamma_D}} g_D(P_i^k)\, \tilde{a}_{ij}$$

(70)

Wenn $[P_1^k, P_2^k] \subseteq \Gamma_N$ $\quad (**)$

$$\tilde{b}_j = \tilde{b}_j + \| P_1^k - P_2^k \| \, g_N\left(\frac{P_1^k + P_2^k}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für } j = 1, 2$$

Entsprechend für $[P_2^k, P_3^k]$ und $[P_3^k, P_1^k]$

Addiere Ergebnis zu den entsprechenden Einträgen des Lastvektors hinzu:

$$b_{\psi(j)} = b_{\psi(j)} + \tilde{b}_j \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

~~Lösche alle Zeilen und Spalten~~

end

Lösche alle Zeilen / Spalten aus A und b, die ~~...~~ zum Dirichlet-Rand gehören:

71

index = ... (Indizes aller Punkte, die nicht auf dem Dirichlet-Rand liegen. Tip: Verwende Befehl setdiff)

A = A(index, index)

b = b(index)

Frage: Wie prüft man (*)?

indexDirBound = unique(EdgesDir) → Indizes aller Dirichlet-Randpunkte

ismember(..., indexDirBound)

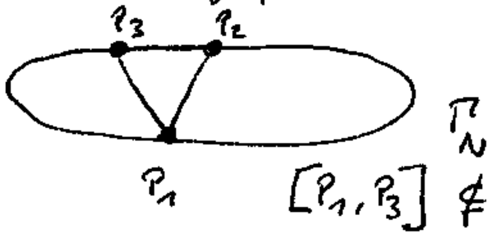
Frage: Wie prüft man (**)?

72

Strategie: Prüfe zuerst, ob T_k mindestens zwei Punkte auf dem Neumann-Rand Γ_N enthält. (Gehe vor wie bei (*)).

Dadurch werden bereits viele Kanten ausgeschlossen.

Aber: Dies ist nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung.

Gegenbeispiel: 

$[P_1, P_3] \not\subset \Gamma_N$, obwohl $P_1, P_3 \in \Gamma_N$

Falls $P_1^k, P_2^k \in \Gamma_N$: Prüfe, ob $[P_1^k, P_2^k] \subseteq \Gamma_N$

Verwende ismember(EdgesNeu, ~~...~~ ...), prod(..., 2) oder „&"

Entsprechend für $[P_2^k, P_3^k]$, $[P_1^k, P_3^k]$

6. Quadratische Finite Elemente

Bisher: Lineare Finite Elemente, d.h. stückweise lineare Basisfunktionen, „Hütchenfunktionen"

Approximationsfehler: $\|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^2$ (vgl. Aufgabe 2)

$h = \max\limits_{i \neq j} \|[P_i, P_j]\|_2$ Länge der längsten Kante

Jetzt: Quadratische Finite Elemente, d.h.

$$\varphi_i^k(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 \quad \text{für } (x,y) \in T_k$$

ist lokal (auf T_k) ein Polynom vom Grad ≤ 2.

Hoffnung: Höhere Genauigkeit

(a) Modellproblem (vgl. Abschnitt 4 bzw. 5)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $K_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$,
$K(x) = \begin{pmatrix} K_{11}(x) & K_{12}(x) \\ K_{21}(x) & K_{22}(x) \end{pmatrix}$

Annahmen aus 4. seien erfüllt. Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu := -\sum\limits_{i,j=1}^{2} \partial_{x_i}\left(K_{ij}\, \partial_{x_j} u\right) = f & \text{für } (x,y) \in \Omega \\ u = g & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Variationelle Formulierung: Zerlege $u = w + u_*$ mit $u_* \in H^1(\Omega)$, $u_*|_{\Gamma_D} = g$ und finde $w \in H_0^1(\Omega)$ derart dass

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \qquad u = w + u_*$$

mit $a(w,v) := \int_\Omega (\nabla v)^T K \nabla u \, d(x,y)$ und $\ell(v) := \int_\Omega f v \, d(x,y) - a(u_*, v)$

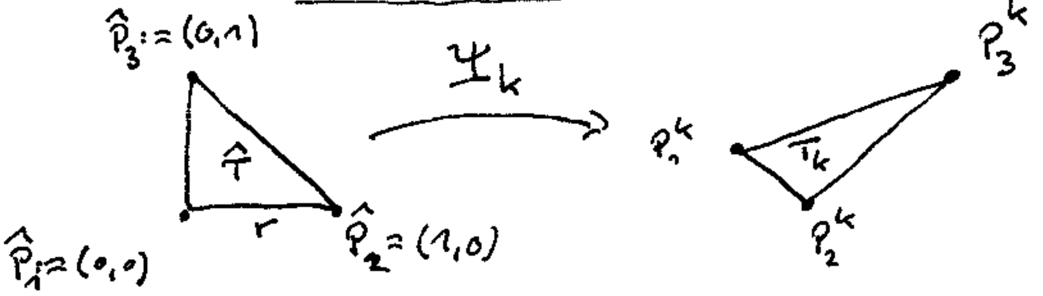
(etwas einfacher als in Abschnitt 5)

(b) Transformation auf das Referenzelement

Um $A = \left(a(\varphi_i,\varphi_j)\right)_{i,j}$ und $b = \left(\ell(\varphi_j)\right)_j$ zu berechnen, müssen Integrale der Form

$$\int_{T_k} (\nabla\varphi_i)^T K \nabla\varphi_j \, d(x,y) \quad \text{und} \quad \int_{T_k} f\varphi_j \, d(x,y)$$

berechnet bzw. approximiert werden. Man könnte im Prinzip wie in 3.(c) Formeln für φ_i bzw. $\nabla\varphi_i$ auf T_k herleiten, doch es ist geschickter, T_k auf das <u>Referenzelement $\hat{T}$</u> zurückzuführen:



Für Dreieck T_k mit Ecken P_1^k, P_2^k, P_3^k definiere

$$\Psi_k : \hat{T} \to T_k, \quad \Psi_k : \binom{r}{s} \longmapsto P_1^k + (P_2^k - P_1^k)\,r + (P_3^k - P_1^k)\,s$$

$$r,s \in [0,1], \quad r+s \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \Psi_k\binom{0}{0} = P_1^k, \quad \Psi_k\binom{1}{0} = P_2^k, \quad \Psi_k\binom{0}{1} = P_3^k$$

Äquivalent: $\Psi_k : \binom{r}{s} \longmapsto P_1^k + J\binom{r}{s}$ (affin lineare Abbildung)

mit Matrix $J := \left[P_2^k - P_1^k \,\middle|\, P_3^k - P_1^k\right] = \begin{pmatrix} x_2^k - x_1^k & x_3^k - x_1^k \\ y_2^k - y_1^k & y_3^k - y_1^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Idee: Führe alle Rechnungen auf dem Referenzelement aus und transformiere dann.