(c) Knoten und nodale Basis

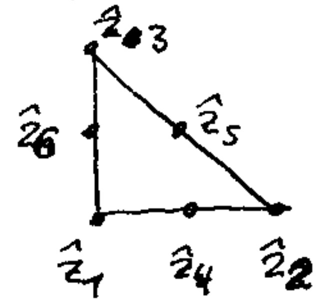
Die Basiselemente φ_i^k sind lokal (auf T_k) Polynome vom Grad ≤ 2 und haben die Freiheitsgrade $c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}$. φ_i^k ist also durch die Werte in den drei Ecken P_1^k, P_2^k, P_3^k von T_k noch nicht festgelegt. Brauche drei zusätzliche Knoten pro Dreieck.

Zusätzliche Bedingung: Auf Kanten zwischen benachbarten Dreiecken sollen die Basisfunktionen eindeutig festgelegt sein. Die Einschränkung von φ_i^k auf $[P_1^k, P_2^k]$ oder $[P_2^k, P_3^k]$ oder $[P_3^k, P_1^k]$ ist nach Umparametrisierung ein Polynom vom Grad 2, wird also durch die Werte in drei Punkten eindeutig bestimmt.

$\Rightarrow$ Wähle einen zusätzlichen Knoten auf jeder Kante.
Genauer: Wähle Mittelpunkt jeder Kante als zusätzlichen Knoten.

78

Auf dem Referenzelement:



$\hat{z}_1 = \hat{P}_1, \ \hat{z}_2 = \hat{P}_2, \ \hat{z}_3 = \hat{P}_3$

$\hat{z}_j = (r_j, s_j)$

Die assoziierten Basiselemente $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_6$ sind Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Interpolationseigenschaft

$$\hat{\varphi}_i(\hat{z}_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(„Lagrange-Basis“, „Nodale Basis“)

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}_1(x,y) = (1-x-y)(1-2x-2y)$

$\hat{\varphi}_2(x,y) = 4x(1-x-y)$

$\hat{\varphi}_3(x,y) = x(2x-1)$

$\hat{\varphi}_4(x,y) = 4y(1-x-y)$

$\hat{\varphi}_5(x,y) = 4xy$

$\hat{\varphi}_6(x,y) = y(2y-1)$

$$\Rightarrow \quad \hat\varphi_1(r,s) = (1-r-s)(1-2r-2s) \qquad \hat\varphi_4(r,s) = 4s(1-r-s)$$

$$\hat\varphi_2(r,s) = 4r(1-r-s) \qquad \hat\varphi_5(r,s) = 4rs$$

$$\hat\varphi_3(r,s) = r(2r-1) \qquad \hat\varphi_6(r,s) = s(2s-1)$$

Basisfunktionen werden nicht analytisch berechnet (siehe unten).

Nodale Basis $\varphi_1^k, \dots, \varphi_6^k$ auf allgemeinem Dreieck T_k ist definiert durch

$$\varphi_j^k(\Psi_k(r,s)) \overset{!}{=} \hat\varphi_j(r,s).$$

Für $z_j^k = \underline{\Psi}(\hat z_j)$ gilt

$$\varphi_i^k(z_j^k) = \varphi_i^k(\underline{\Psi}_k(\hat z_j)) = \hat\varphi_i(\hat z_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Variablentransformation:

Für Funktionen $F: T_k \to \mathbb{R}$, $G: \hat T \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F(x,y) = G(r,s) \qquad \text{für } (x,y) = \Psi(r,s)$$

gilt

$$\int_{T_k} F(x,y)\, d(x,y) = |\det J_k| \int_{\hat T} G(r,s)\, d(r,s)$$

$$\nabla F(x,y) = J_k^{-T} \nabla G(r,s)$$

$\Rightarrow$ Muss Gradienten / Integrale nur auf dem Referenzelement $\hat T$ berechnen.

(d) Quadraturformeln auf dem Referenzelement

Problem: Die bisher verwendete Quadraturformel

$$\int_{T_k} F(x,y)\, d(x,y) \approx |T_k| \cdot F(x_*^k, y_*^k)$$

aus Abschnitt 3. (c) ist zu ungenau für quadratische Finite Elemente.
Verwende nun auf $\hat{T}$ die Quadraturformel

$$\int_{\hat{T}} G(r,s)\, d(r,s) \approx \underbrace{\frac{|\hat{T}|}{3}}_{=1/6} \Big(G(\xi_1,\eta_1) + G(\xi_2,\eta_2) + G(\xi_3,\eta_3) \Big)$$

mit $(\xi_1,\eta_1) = (1/6, 1/6)$
$(\xi_2,\eta_2) = (2/3, 1/6)$
$(\xi_3,\eta_3) = (1/6, 2/3)$

Exakt, falls G ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist.

(e) Massematrix und Lastvektor

Berechne wieder dreiecksweise $a(\varphi_i,\varphi_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{T_k}(\varphi_i,\varphi_j)$, $\ell(\varphi_j) = \sum_{k=1}^{m} \ell_{T_k}(\varphi_j)$

$$a_{T_k}(\varphi_i^k,\varphi_j^k) := \int_{T_k} \left(\nabla\varphi_i^k(x,y)\right)^T \kappa(x,y)\, \nabla\varphi_j^k(x,y)\; d(x,y)$$

$$= |\det J_k| \int_{\hat{T}} \left(J_k^{-T}\nabla\hat{\varphi}_i(r,s)\right)^T \kappa(\Psi_k(r,s))\, J_k^{-T}\nabla\hat{\varphi}_j(r,s)\, d(r,s)$$

$$\approx \frac{|\det J_k|}{6} \sum_{n=1}^{3} \left(\nabla\hat{\varphi}_i(\xi_n,\eta_n)\right)^T J_k^{-1}\, \kappa(\Psi_k(\xi_n,\eta_n))\, J_k^{-T} \nabla\hat{\varphi}_k(\xi_n,\eta_n)$$

$$\ell_{T_k}(\varphi_j^k) := \int_{T_k} f(x,y)\, \varphi_j^k(x,y)\, d(x,y) - a_{T_k}(u_*, \varphi_j^k)$$

Wähle $u_*\big|_{T_k}$ quadratisch mit

$$u_*(z_j^k) = \begin{cases} g_D(z_j^k) & \text{falls } z_j^k \in \overline{\Gamma}_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u_*(x,y) = \sum_{\substack{i=1 \\ z_i^k \in \overline{\Gamma}_D}}^{6} g_D(z_i^k)\, \varphi_i^k(x,y)$$

Berechnung von $a_{T_k}(u_*, \varphi_j^k) = \sum_{\substack{i=1 \\ z_i^k \in \overline{\Gamma}_D}}^{6} g_D(z_i^k)\, a_{T_k}(\varphi_i^k, \varphi_j^k)$ wie oben

$$\int_{T_k} f(x,y)\varphi_j(x,y)\, d(x,y) = |\det J_k| \int_{\hat{T}} f(\underline{\Psi}(r,s))\, \hat{\varphi}_j(r,s)\, d(r,s)$$

$$\approx \frac{|\det J_k|}{6} \sum_{n=1}^{3} f(\Psi_k(\xi_n,\eta_n))\hat{\varphi}_j(\xi_n,\eta_n)$$

(f) Berechnung von $\hat{\varphi}_j(\xi_n,\eta_n)$ und $\nabla\hat{\varphi}_j(\xi_n,\eta_n)$ (84)

Gehe ähnlich vor wie in 3. (c)

$$\hat{\varphi}_j(r,s) = \beta_{1j} + \beta_{2j}\, r + \beta_{3j}\, s + \beta_{4j}\, r^2 + \beta_{5j}\, rs + \beta_{6j}\, s^2, \quad j = 1,\dots,6$$

Setze $B := (\beta_{nj})_{n,j} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$,

$$Z := \begin{pmatrix} 1 & r_1 & s_1 & r_1^2 & r_1 s_1 & s_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_6 & s_6 & r_6^2 & r_6 s_6 & s_6^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \qquad \hat{z}_i = (r_i, s_i)$$

$$\Rightarrow \quad ZB = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1(\hat{z}_1) & \dots & \hat{\varphi}_6(\hat{z}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\varphi}_1(\hat{z}_6) & \dots & \hat{\varphi}_6(\hat{z}_6) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} I \quad \Rightarrow \quad B = Z^{-1}$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1^2 & \xi_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2^2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2^2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3^2 & \xi_3\eta_3 & \eta_3^2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \hat\varphi_1(\xi_1,\eta_1) & \dots & \hat\varphi_6(\xi_1,\eta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat\varphi_1(\xi_3,\eta_3) & \dots & \hat\varphi_6(\xi_3,\eta_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\xi_1 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi_2 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\xi_3 & \eta_3 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \partial_r \hat\varphi_1(\xi_1,\eta_1) & \dots & \partial_r \hat\varphi_6(\xi_1,\eta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_r \hat\varphi_1(\xi_3,\eta_3) & \dots & \partial_r \hat\varphi_6(\xi_3,\eta_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_1 & 2\eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_2 & 2\eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_3 & 2\eta_3 \end{pmatrix} B = \left(\partial_s \hat\varphi_j(\xi_i,\eta_i) \right)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,\dots,6}}$$

(g) Warum so und nicht anders?

Im Prinzip könnte man auch auf die Transformation auf das Referenzelement verzichten. Dann müsste man allerdings auf jedem Dreieck T_k die Koeffizientenmatrix B und die Auswertungen von φ_j^k bzw. $\nabla\varphi_j^k$ neu berechnen, d.h. eine 6×6-Matrix invertieren.(*) Mit Transformation auf das Referenzelement muss man dies nur einmal tun. Die Berechnung von J_k^{-1} ist billig, da $J_k \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ($\to$ explizite Formel für J_k^{-1}).

Bei linearen finiten Elementen ist es ebenfalls ~~etwas~~ ein bisschen effizienter, die Berechnungen auf dem Referenzelement durchzuführen, doch der Vorteil ist hier lange nicht so groß wie bei quadratischen finiten Elementen.

(*) bzw. sechs LGS der Form $Z\beta = e_j$ lösen.