7. Erzeugung von Triangulierungen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes konvexes Gebiet mit Rand Γ.

Wie findet man eine polygonal berandete Approximation $\tilde{\Omega} \approx \Omega$ und eine zulässige Triangulierung von $\tilde{\Omega}$?

Die Konstante in den Fehlerabschätzungen hängt von $\frac{1}{\sin^2(\alpha_{min})}$ ab, wobei α_{min} der kleinste Innenwinkel der Dreiecke der Triangulierung ist.

Vermeide deswegen sehr „spitze" Dreiecke

Notation: $[P_i, P_j]$ Strecke/Kante zwischen P_i und P_j

$[P_i, P_j, P_l]$ Dreieck mit Ecken P_i, P_j, P_l

7.1 Naiver Algorithmus

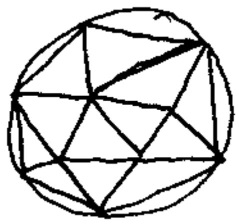
36

Idee: Erzeuge eine grobe Triangulierung, die iterativ verfeinert wird.

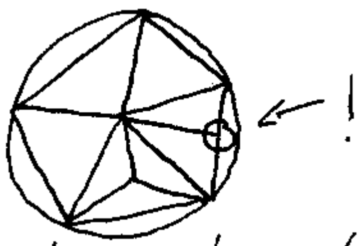
1. Setze $i := 0$. Wähle eine grobe Triangulierung $\mathcal{T}_i = \{T_1^i, \dots, T_{m_i}^i\}$ und setze $\tilde{\Omega}_i := \bigcup_{k=1}^{m_i} T_k^i$, d.h. $\tilde{\Omega}_i :=$ Inneres von $\bigcup_{k=1}^{m_i} T_k^i$.

   Bedingung: Jede Ecke, die auf $\tilde{\Gamma}_i$ (= Rand von $\tilde{\Omega}_i$) liegt, muss auch auf Γ liegen.

Richtig:

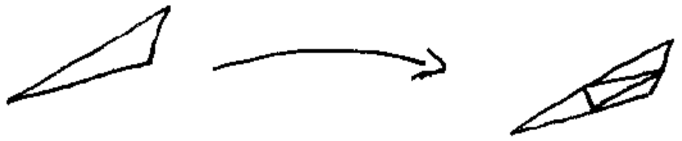


Falsch:



Verfeinere nun so, dass eine zulässige Triangulierung herauskommt.

2. Unterteile jedes Dreieck von T_i, das keine Kante auf $\tilde{\Gamma}_i$ hat, in vier Dreiecke, indem Ecken auf den Seitenmittelpunkten der drei Kanten hinzugefügt werden:



3. Bei Dreiecken mit einer Kante auf $\tilde{\Gamma}_i$:

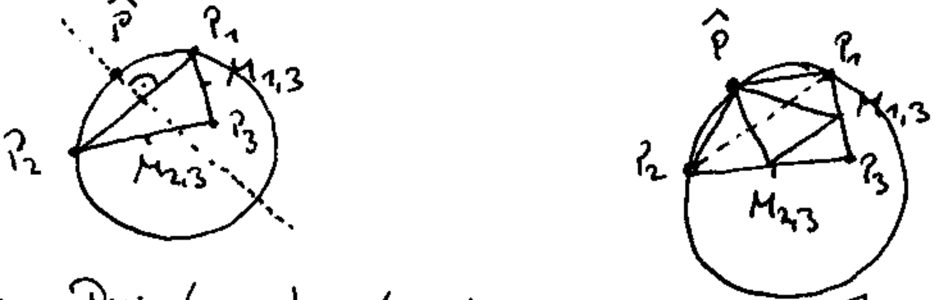
Sei (nach Umnummerierung) $[P_1, P_2, P_3]$ Dreieck mit Kante $[P_1, P_2] \subseteq \tilde{\Gamma}_i$.
Bestimme den Schnittpunkt $\hat{P}$ der Mittelsenkrechten von $[P_1, P_2]$ mit Γ, der dem Seitenmittelpunkt von $[P_1, P_2]$ am Nächsten liegt. Annahme: $\hat{P}$ ist eindeutig

~~Entferne $[P_1, P_2, P_3]$ aus der Triangulierung und füge stattdessen die Dreiecke~~

Bestimme die Mittelpunkte $M_{1,3}$ von $[P_1, P_3]$ und $M_{2,3}$ von $[P_2, P_3]$. 38
Entferne $[P_1, P_2, P_3]$ aus der Triangulierung und füge stattdessen die Dreiecke

$$[P_1, M_{1,3}, \hat{P}],\ [P_2, \hat{P}, M_{23}],\ [M_{1,3}, M_{2,3}, \hat{P}],\ [M_{1,3}, P_3, M_{2,3}]$$

hinzu. Führe dies für alle Dreiecke mit Kanten auf $\tilde{\Gamma}_i$ durch.



Zerlege Dreiecke mit mehr als einer Kante auf $\tilde{\Gamma}_i$ analog.

4. Falls weitere Verfeinerung nötig:
Setze $i := i+1$, $\tilde{\Omega}_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} T_k^i$ und gehe zu 2.

Problem: Die Qualität der letzten Triangulierung hängt stark von der Wahl der ersten Triangulierung ab. Beispiele siehe Folien.

7.2 Delaunay-Triangulierung und Voronoi-Diagramm

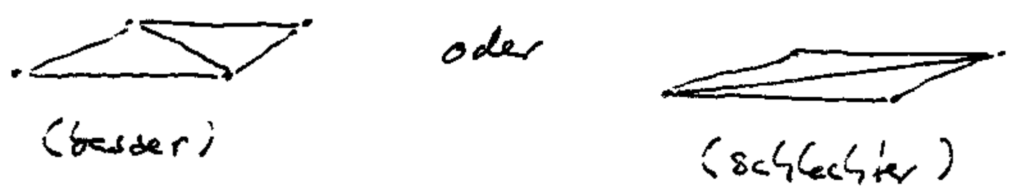
Boris Nikolajewitsch Delone (1890-1980), franz. Delaunay
Georgi Feodosjewitsch Woronoi (1868-1908)

Literatur: Rolf Klein, „Algorithmische Geometrie", Addison-Wesley, Bonn 1997.

Annahme: Die Ecken $P_1, \dots, P_N$ der Triangulierung sind bereits vorgegeben.
(Wahl von $P_i \longrightarrow$ später)

Frage: Welche Punkte sollen zum gleichen Dreieck gehören?

Beispiel:



Definition 7.1 (Bisektor, Voronoi-Diagramm)

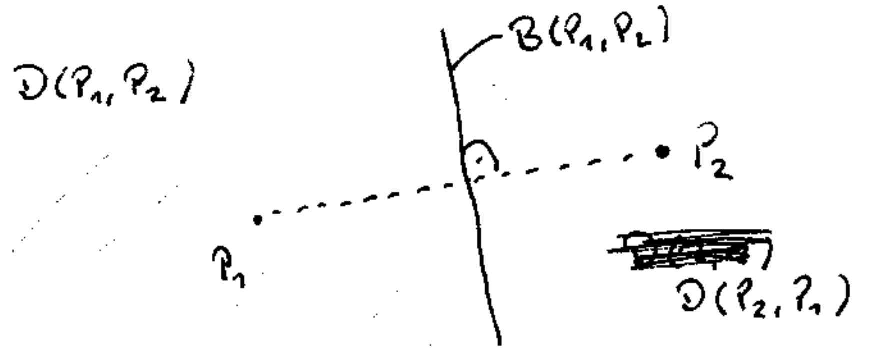
Der Bisektor $B(P_1, P_2)$ von zwei Punkten $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, die von P_1 und P_2 den gleichen Abstand haben:

$$B(P_1, P_2) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \|P_1 - P\|_2 = \|P_2 - P\|_2 \right\}$$

Weiter sei

$$D(P_1, P_2) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \|P_1 - P\|_2 < \|P_2 - P\| \right\}$$

die Menge aller Punkte, die näher bei P_1 als bei P_2 liegen.



Sei $S=\{P_1,\dots,P_N\}$ eine Auswahl an Punkten $P_k \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt

$$VR(P_k,S) = \bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} D(P_k,P_i)$$

die <u>Voronoi-Region</u> von P_k bezüglich S.

Interpretation: $VR(P_k,S)$ enthält alle Punkte $P\in\mathbb{R}^2$, die näher bei P_k als bei $P_1,\dots,P_{k-1},P_{k+1},\dots,P_N$ liegen.

Das Voronoi-Diagramm ist die Gesamtheit aller Linien zwischen den Voronoi-Regionen.

Beispiel: Siehe Folien

102

<u>Definition 7.2 (Delaunay-Triangulierung)</u>

Die <u>Delaunay-Zerlegung</u> erhält man, wenn man zwei Punkte aus $S=\{P_1,\dots,P_m\}$ genau dann verbindet, wenn ihre Voronoi-Regionen eine gemeinsame Kante haben, die aus mehr als einen einzigen Punkt besteht.

Bemerkung: Die Delaunay-Zerlegung ist eine geometrische Realisierung des dualen Graphen des Voronoi-Diagramms.

Jede beschränkte Fläche der Delaunay-Zerlegung hat genausoviele Kanten wie im entsprechenden Knoten des Voronoi-Diagramms zusammenlaufen.

Annahmen:

(A1) Es gibt in S nicht vier (oder mehr) Punkte auf einem gemeinsamen Kreisbogen.

(A2) Es gibt keine drei (oder mehr) Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.

Dann besteht die Delaunay-Zerlegung nur aus Dreiecken, wird <u>Delaunay-Triangulierung</u> genannt und von nun an mit $\mathcal{T}^D(S)$ bezeichnet.

Notation: Für eine Triangulierung $\mathcal{T}$ mit N Punkten und m Dreiecken sei:

$$\omega(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{3m})$$

die aufsteigend sortierte Folge der Innenwinkel aller Dreiecke (d.h. α_1 ist der kleinste Innenwinkel des „spitzigsten" Dreiecks).

Von nun an verstehen wir unter der Triangulierung einer Punktmenge S die maximale Menge von Liniensegmenten mit Endpunkten in S, von denen sich je zwei höchstens in ihren Endpunkten schneiden. Die Kanten der konvexen Hülle von S gehören zu jeder Triangulierung von S.
(Das bedeutet, dass $\tilde{\Omega}$ immer konvex ist!)

Man kann zeigen: Wenn die konvexe Hülle von $S := \{P_1, \dots, P_N\}$ r Ecken hat, dann hat jede Triangulierung von S genau

$$2(N-1)-r$$

viele Dreiecke.

Die Delaunay-Triangulierung ist im folgenden Sinne optimal:

Satz 7.3

S erfülle (A1) und (A2). Sei $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}^D(S)$ und

$$\omega(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3m})$$
$$\omega(\mathcal{T}^D(S)) = (\alpha_1^D, \dots, \alpha_{3m}^D)$$

Dann gilt entweder

$$\alpha_1^D > \alpha_1$$

oder es gibt ein $k \in \{1, \dots, 3m-2\}$ mit

$$\alpha_1^D = \alpha_1, \dots, \alpha_k^D = \alpha_k, \quad \alpha_{k+1}^D > \alpha_{k+1}$$

Durch diese Eigenschaft ist $\mathcal{T}^D(S)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: R. Klein, Kap. 5, Theorem 5.17.

Satz 7.4

Sei $P_i, P_j, P_l \in S$ und seien (A1) und (A2) erfüllt. Dann gilt $[P_i, P_j, P_l] \in \mathcal{T}^D(S)$ genau dann, wenn der Umkreis von $[P_i, P_j, P_l]$ (d.h. der eindeutig bestimmte Kreis durch P_i, P_j, P_l) keinen Punkt $P \in S$ im Inneren enthält.

Beweis: Folgt aus der Definition

Illustration: Siehe Folien.