

### 7.3 Berechnung der Delaunay-Triangulierung

Sei  $S = \{P_1, \dots, P_N\}$  mit  $P_k \in \mathbb{R}^2$  eine Punktmenge, die (A1) und (A2) erfüllt.

$$\text{Setze } S_k := \{P_1, \dots, P_k\} = S_{k-1} \cup \{P_k\}$$

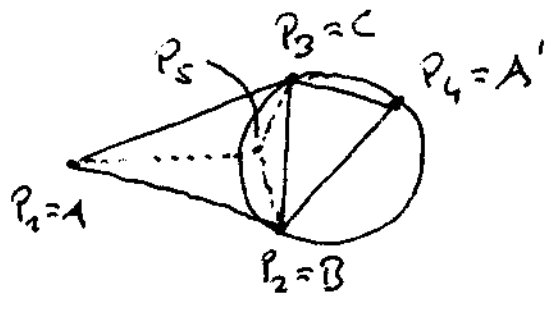
Inkrementelle Konstruktion der Delaunay-Triangulierung  $\mathcal{T}^D(S)$ :

Wie berechnet man  $\mathcal{T}^D(S_k)$ , wenn  $\mathcal{T}^D(S_{k-1})$  bereits berechnet wurde?

Fall 1:  $P_k$  liegt in der konvexen Hülle von  $S_{k-1}$

Dann gibt es ein Dreieck  $[A, B, C] \in \mathcal{T}^D(S_{k-1})$ , das  $P_k$  im Inneren enthält (wegen (A2)). Ersetze  $[A, B, C]$  durch  $[P_k, A, B]$ ,  $[P_k, B, C]$ ,  $[P_k, A, C]$ .

Beispiel:  $k=5$



Die neue Triangulierung ist im Allgemeinen keine Delaunay-Triangulierung mehr, aber:

Lemma 7.4

Die drei neuen Kanten  $[P_k, A]$ ,  $[P_k, B]$ ,  $[P_k, C]$  treten in  $\mathcal{T}^D(S_k)$  tatsächlich auf.

Beweis: Klein, Kap. 6, Lemma 6.2.

Lemma 7.5

Sei  $[A', B, C]$  ein Dreieck, dessen Umkreis zwischen seinem Rand und der Kante  $[B, C]$  den Punkt  $P_k$  enthält.

Dann ist  $[B, C]$  keine Delaunay-Kante in  $\mathcal{T}^D(S_k)$ .

Idee: Führe nun einen Edge Flip durch, d.h. ersetze

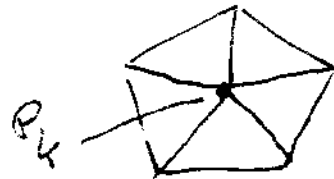
$[P_k, B, C], [A', B, C]$  durch  $[P_k, A', B], [P_k, A', C]$ .



Die neue Kante  $[P_k, A']$  tritt in  $\mathcal{J}^D(S_k)$  auf, aber die Kanten  $[A', C]$  und  $[A', B]$  müssen ebenfalls überprüft werden.

Wenn z.B.  $P_k$  im Inneren von  $[A', B, D]$  mit  $D \in S_k$  liegt, muss  $[P_k, A', B], [A', B, D]$  durch  $[P_k, A', D], [P_k, D, B]$  ersetzt werden.

Unter dem Stern von  $P_k$  versteht man alle Dreiecke, die  $P_k$  enthalten:

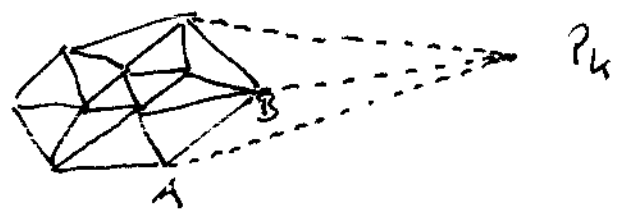


Alle Kanten des Sterns, die  $P_k$  nicht enthalten, müssen überprüft und ggf. durch Edge Flips beseitigt werden. Dadurch vergrößert sich der Stern, d.h. es entstehen neue „äußere“ Kanten, die ebenfalls überprüft werden müssen.

Beispiel: Siehe Folien

Fall 2:  $P_k$  liegt nicht in der konvexen Hülle von  $S_{k-1}$ .

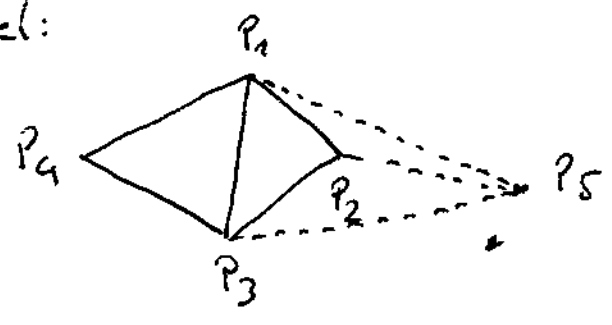
Bestimme alle von  $P_k$  aus "sichtbaren" Kanten der konvexen Hülle. Ist  $[A, B]$  sichtbar, so füge  $[A, B, P_k]$  als neues Dreieck hinzu:



$[A, P_k]$  und  $[B, P_k]$  sind Delaunay-Kanten in  $\mathcal{T}^D(S_k)$ , aber  $[A, B]$  muss ggf. durch Edge Flip beseitigt werden wie in Fall 1.

Schwierigkeit: Bestimmung der sichtbaren Kanten.

Beispiel:



$P_1, P_2, P_3$  sind von  $P_5$  aus sichtbar.  
 $[P_1, P_2]$  und  $[P_2, P_3]$  sind sichtbar, aber  $[P_1, P_3]$  nicht.

Bemerkung: Anstelle der inkrementellen Konstruktion gibt es auch andere Strategien zur Berechnung von  $\mathcal{T}^D(S)$ :

„Sweep“-Verfahren, „Divide and Conquer“, geometrische Transformation vgl. Klein G.3-6.5

## 7.4 Wahl der Ecken der Triangulierung

(113)

Bisher: Konstruktion der optimalen Triangulierung  $T^D(S)$  für gegebene Punkte  $S = \{P_1, \dots, P_N\}$ .

Frage: Wie wählt man  $S$  geschickt?

Literatur: Per-Olof Persson und Gilbert Strang  
A Simple Mesh Generator in MATLAB  
SIAM Review, 46, no. 2, pp. 329-345, 2004.

http://persson.berkeley.edu/distmesh

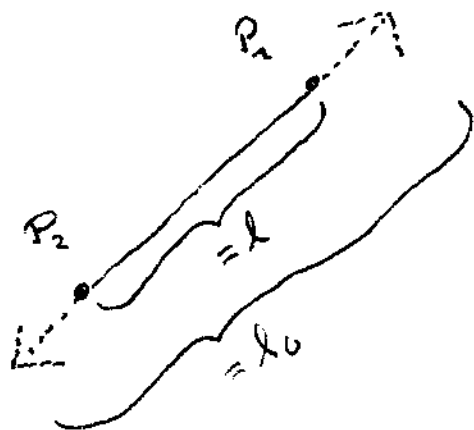
Definiere das Gebiet  $\Omega$  durch eine Funktion  $d(x, y)$ :

(114)

$$P = (x, y) \in \Omega \Leftrightarrow d(x, y) < 0$$

$$P = (x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow d(x, y) = 0$$

Idee: Interpretiere die Kanten der Delaunay-Triangulierung  $T^D(S)$  als Stäbe bzw. Federn, die eine gewünschte Länge  $l_0$  haben sollen und eine Kraft ausüben, wenn der Abstand der Endpunkte die Länge unterschreitet:



$$F_{12}(P_1) = (P_1 - P_2) \cdot f(l, l_0)$$

$$l = \|P_1 - P_2\|_2$$

$$f(l, l_0) = \begin{cases} l_0 - l & \text{falls } l < l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berücksichtige Kräfte zwischen allen Punktpaaren, die in der aktuellen Delaunay-Triangulierung durch Kanten verbunden sind. Die gewünschte Länge  $l_0$  der Kante kann für alle Kanten gleich sein oder adaptiv gewählt werden.  $\rightarrow$  lokale Verfeinerung

Am Rand von  $\Omega$  werden Kräfte definiert, die verhindern, dass Punkte nach draußen gedrückt werden.

Löse dann ein Problem der Form

$$F(P) = 0, \quad P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N \end{pmatrix}$$

$x_i, y_i$ : Koordinaten der Punkte,  $F: \mathbb{R}^{N \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times 2}$  Kraftfunktion.

Problem:  $F$  ist nicht stetig, da die Kräfte von den Kanten der aktuellen Triangulierung abhängen, die sich in unkontrollierter Weise ändern kann, wenn sich Punkte bewegen.

Idee: Füge künstliche Zeit ein und löse die ODE

$$\frac{dP}{dt} = F(P)$$

mit dem expliziten Euler-Verfahren  $\rightarrow$  Konvergenz gegen Plateau

Details und Erweiterungen: Siehe Persson & Strang 2004.