9.2 Zweigitterverfahren

Betrachte stückweise lineare Finite Elemente auf einer groben und einer verfeinerten Triangulierung:

$\mathcal{T}_{L-1}$

$\mathcal{T}_{L}$

Sei $V^{(L)}$ FE-Raum mit Basis $\{\varphi_1^{(L)}, \dots, \varphi_{N^{(L)}}^{(L)}\}$ und Triangulierung $\mathcal{T}_L$ mit Ecken $\{P_1^{(L)}, \dots, P_{N^{(L)}}^{(L)}\}$.

Annahme: $V^{(L-1)}$ ist echter Teilraum von $V^{(L)}$

(ist bei obiger Verfeinerung erfüllt)

Dann gilt $\varphi_j^{(L-1)} \in V^{(L-1)} \subseteq V^{(L)}$ für alle j, d.h. es gibt eine Darstellung

$$\varphi_j^{(L-1)} = \sum_{k=1}^{N^{(L)}} r_{jk} \varphi_k^{(L)} \qquad \text{mit } r_{jk} = \varphi_j^{(L-1)}(P_k^{(L)}) \in \mathbb{R}$$

Die Matrix $r = (r_{jk})_{j,k} \in \mathbb{R}^{N^{(L-1)} \times N^{(L)}}$ heißt Restriktion $\boxed{r}$

$r^T \in \mathbb{R}^{N^{(L)} \times N^{(L-1)}}$ heißt Prolongation $\boxed{r^T}$

Dann gilt für alle $v = \sum_{j=1}^{N^{(L-1)}} \hat{v}_j^{(L-1)} \varphi_j^{(L-1)} \in V^{(L-1)}$, $\hat{v}_j^{(L-1)} \in \mathbb{R}$

$$v = \sum_{j=1}^{N^{(L-1)}} \hat{v}_j^{(L-1)} \left(\sum_{k=1}^{N^{(L)}} r_{jk} \varphi_k^{(L)} \right) = \sum_{k=1}^{N^{(L)}} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N^{(L-1)}} \hat{v}_j^{(L-1)} r_{jk} \right)}_{=: \hat{v}_j^{(L)}} \varphi_k^{(L)}$$

Für $\hat{\underline{v}}^{(L)} := (\hat{v}_j^{(L)})_j$ und $\hat{\underline{v}}^{(L-1)} = (\hat{v}_k^{(L-1)})_k$ gilt also

$$\hat{\underline{v}}^{(L)} = r^T \hat{\underline{v}}^{(L-1)},$$

d.h. die Prolongation bildet Grobgitter- auf Feingitterkoeffizienten ab.

Ziel: Suche Lösung $u^{(L)} = \sum_{j=1}^{N^{(L)}} \hat{u}_j^{(L)} \varphi_j^{(L)} \in V^{(L)}$ von

$$a(u^{(L)}, v^{(L)}) = \ell(v^{(L)}) \qquad \forall\, v^{(L)} \in V^{(L)}$$

bzw. von

(9.4) $\quad A^{(L)} \hat{u}^{(L)} = b^{(L)}$

mit Steifigkeitsmatrix $A^{(L)} = \left(a(\varphi_j^{(L)}, \varphi_k^{(L)})\right)_{j,k}$

Lastvektor $b^{(L)} = \left(\ell(\varphi_j^{(L)})\right)_j$

$a(\cdot,\cdot)$ Bilinearform, $\ell(\cdot)$ Linearform (inklusive Randbed.)

Führe einige Iterationen mit Gauß-Seidel oder gedämpften Jacobi-Verfahren durch. Erhalte Approximation

$$\hat{w}^{(L)} \approx \hat{u}^{(L)} \quad \text{bzw.} \quad w^{(L)} := \sum_{j=1}^{N^{(L)}} \hat{w}_j^{(L)} \varphi_j^{(L)} \approx u^{(L)}.$$

Der Fehler $e^{(L)} := u^{(L)} - w^{(L)}$ ist noch zu groß, aber glatt. Es gilt

$$a(e^{(L)}, v^{(L)}) = \ell(v^{(L)}) - a(w^{(L)}, v^{(L)}) \qquad \forall\, v^{(L)} \in V^{(L)}$$

Berechne Korrektur auf dem gröberen Gitter:

Suche $e^{(L-1)} = \sum_{j=1}^{N^{(L-1)}} \hat{e}_j^{(L-1)} \varphi_j^{(L-1)} \in V^{(L-1)}$ derart, dass

(9.5) $\quad a(e^{(L-1)}, v^{(L-1)}) = \ell(v^{(L-1)}) - a(w^{(L)}, v^{(L-1)}) \quad \forall v^{(L-1)} \in V^{(L-1)}$

Erhalte dann eine verbesserte Approximation

$$w^{(L)} + e^{(L-1)} \approx u^{(L)}$$

Welcher LGS entspricht (9.5)? Für $v^{(l-1)} := \varphi_k^{(l-1)}$ gilt

$$(9.5) \Leftrightarrow \sum_i \hat{e}_i^{(l-1)} a(\varphi_i^{(l-1)}, \varphi_k^{(l-1)}) \stackrel{!}{=} \ell(\varphi_k^{(l-1)}) - \sum_j \hat{w}_j^{(l)} a(\varphi_j^{(l)}, \varphi_k^{(l-1)})$$

Mit $\varphi_k^{(l-1)} = \sum_m r_{km} \varphi_m^{(l)}$ und $\varphi_i^{(l-1)} = \sum_j r_{ij} \varphi_j^{(l)}$ erhält man

$$(9.5) \Leftrightarrow \sum_i \hat{e}_i^{(l-1)} \sum_{j,m} r_{km} r_{ij}\, a(\varphi_j^{(l)}, \varphi_m^{(l)})$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_m r_{km}\, \ell(\varphi_m^{(l)}) - \sum_j \hat{w}_j^{(l)} \sum_m r_{km}\, a(\varphi_j^{(l)}, \varphi_m^{(l)})$$

$$\Leftrightarrow \left[r A^{(l)} r^T \hat{e}^{(l-1)} \right]_k = \left[r b^{(l)} \right]_k - \left[r A^{(l)} \hat{w}^{(l)} \right]_k$$

Dies gilt für alle $k = 1, \dots, N^{(l-1)}$. Also ist

$$(9.5) \Leftrightarrow A^{(l-1)} \hat{e}^{(l-1)} = r \left(b^{(l)} - A^{(l)} \hat{w}^{(l)} \right) \qquad (9.6)$$

mit $A^{(l-1)} = r A^{(l)} r^T$ → kann leicht aus $A^{(l)}$ berechnet werden

---

Löse also (9.6)

$$\cancel{(9.6)\ A^{(l-1)} \hat{e}^{(l-1)} = b^{(l-1)} - r A^{(l)} \hat{w}^{(l)}}$$

und setze

$$u_{neu}^{(l)} = w^{(l)} + e^{(l-1)} \quad \text{mit} \quad e^{(l-1)} = \sum_{j=1}^{N^{(l-1)}} \hat{e}_j^{(l-1)} \varphi_j^{(l-1)}$$

bzw. äquivalent

$$u_{neu}^{(l)} = \sum_{j=1}^{N^{(l)}} \hat{u}_{neu,j}^{(l)} \varphi_j^{(l)} \quad \text{mit} \quad \hat{u}_{neu}^{(l)} = \hat{u}^{(l)} + r^T \hat{e}^{(l-1)}.$$

Könnte nun von vorne beginnen:

Glättungsschritt (mit Startwert $u_{neu}^{(l)}$) → Defekt berechnen

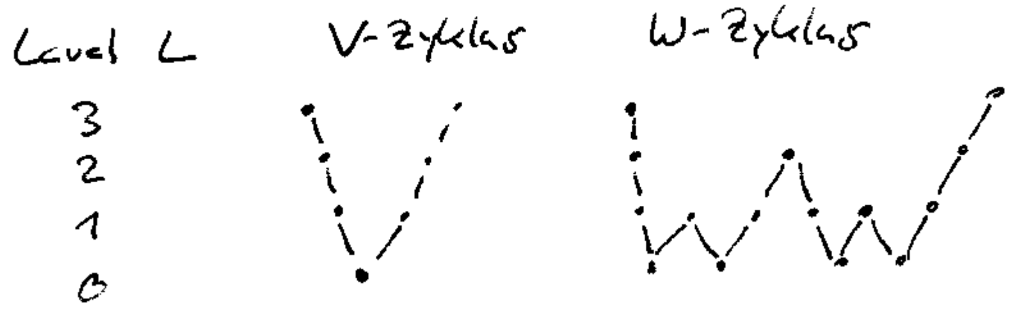
→ Grobgitterkorrektur berechnen → Korrektur → ...

9.3 Mehrgitterverfahren

Idee: Löse das Problem auf dem gröberen Gitter nicht exakt, sondern führe einige Glättungsschritte durch und berechne dann eine Korrektur auf einem noch gröberen Gitter usw.

Auf dem gröbsten Gitter gibt es so wenig Basiselemente, dass das LGS mit einem direkten Löser (z.B. Cholesky) gelöst werden kann.

Schema:



Mehrgitterverfahren: Algorithmus

Ziel: Approximiere die Lösung des LGS

$A^{(L)}x = \beta$ (z.B. $L = L_{max}$, $x = \hat{u}$, $\beta = b$, $A^{(L)} = A$)

$A^{(L_{max})} := A$, $A^{(L-1)} = r^{(L-1)} A^{(L)} (r^{(L-1)})^T$, $r_{jk}^{(L-1)} = \varphi_j^{(L-1)}(p_k^{(L)})$

$$x^{(L)} = mgv(L, \{A^{(i)}\}_{i=0,\dots,L}, \beta, x_0, \{r^{(i)}\}_{i=0,\dots,L-1}, n_{GS})$$

(i) Glättung: Führe n_{GS} Glättungsschritte mit Startvektor x_0 durch (gedämpftes Jacobi-Verfahren oder Gauß-Seidel mit Matrix $A^{(L)}$)
Erhalte (ungenaue) Approximation $\tilde{x}^{(L)} \approx x^{(L)}$.

(ii) Berechne Defekt: $d^{(L)} = \beta - A^{(L)} \tilde{x}^{(L)}$