

(iii) Restriktion: $d^{(L-1)} = r^{(L-1)} d^{(L)}$

(iv) Grodgitterkorrektur:

Falls $L > 1$:

$$\varepsilon^{(L-1)} = \text{mgv}(L-1, \{A^{(i)}\}_{i=0, \dots, L-1}, d^{(L-1)}, 0, \{r^{(i)}\}_{i=0, \dots, L-2}, n_{GS})$$

Falls der W-Zyklus verwendet werden soll: Zusätzlich

$$\varepsilon^{(L-1)} = \text{mgv}(L-1, \{A^{(i)}\}_{i=0, \dots, L-1}, d^{(L-1)}, \varepsilon^{(L-1)}, \{r^{(i)}\}, n_{GS})$$

Falls $L = 1$:

Löse $A^{(0)} \varepsilon^{(0)} = d^{(0)}$ mit Cholesky-Zerlegung

Korrektur: $x^{(L)} = \tilde{x}^{(L)} + (r^{(L-1)})^T \varepsilon^{(L-1)}$

(v) Nachglättung: Führe nochmals n_{GS} Glättungsschritte mit Matrix $A^{(L)}$ und Startwert $x^{(L)}$ durch ($x^{(L)}$ wird überschrieben)

Bemerkungen:

- 1. Für $L=1$ erhält man den Zweigitter-Algorithmus
- 2. Oft sind nur wenige Glättungsschritte ausreichend, z.B. $n_{GS} \in \{1, 2, 3\}$

Beim W-Zyklus wird die Nachglättung (v) oft weggelassen.

Man kann zeigen, dass Mehrgitterverfahren unter gewissen Voraussetzungen $\frac{2}{3}$ mit einer von der Zahl der Ebenen unabhängigen Konvergenzrate $0 < c < 1$ konvergieren.

Langer Beweis!

3.4. Berechnung von Startwerten, Aufwand

Wie wählt man den Startwert x_0 auf dem feinsten Gitter?

Idee: Beginne auf dem größten Gitter und gehe rekursiv „nach oben“ („geschichtete Iteration“)

$r^{(L-1)} \in \mathbb{R}^{N^{(L-1)} \times N^{(L)}}$ Restriktion $L \rightarrow L-1$

$(r^{(L-1)})^T = \square$ Prolongation $L-1 \rightarrow L$

Setze $x_0^{(0)} = (A^{(0)})^{-1} b^{(0)}$ (Löse LGS mit Cholesky)

$$x_0^{(1)} = (r^{(0)})^T x_0^{(0)}$$

$$x_0^{(1)} = \text{mgv}(1, \{A^{(i)}\}_{i=0,1}, b^{(1)}, x_0^{(1)}, \dots)$$

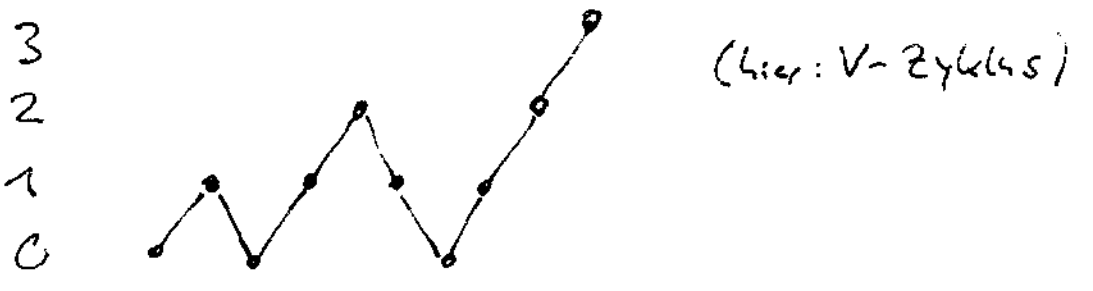
$$x_0^{(2)} = (r^{(1)})^T x_0^{(1)}$$

$$x_0^{(2)} = \text{mgv}(2, \{A^{(i)}\}_{i=0,1,2}, b^{(2)}, x_0^{(2)}, \dots)$$

⋮

$$x_0^{(L_{\max})} = (r^{(L_{\max}-1)})^T x_0^{(L_{\max}-1)}$$

Schema: Level L



Der durch die geschichtete Iteration erzeugte Startwert ist oft so gut, dass dann nur noch wenige (ca. 1 bis 2) Mehrgitter-Iterationen nötig sind.

Der Fehler, der durch das Lösen des LGS entsteht, muss nicht viel kleiner sein als der Fehler der Raumdiskretisierung.

Aufwand von Mehrgitterverfahren

Sei M_L der Aufwand von $\text{mgv}(L, \dots, 1)$ im Fall des V-Zyklus.

Annahme: $A^{(L)}$ dünnbesetzt, $A \in \mathbb{R}^{N^{(L)} \times N^{(L)}}$, $C \cdot N^{(L)}$ Nichtnullen-träge

- (i) Glättung: $C \cdot n_{GS} N^{(L)}$ Operationen
- (ii) Defektberechnung: $C N^{(L)}$
- (iii) Restriktion: $C N^{(L)}$
- (iv) Grobgitterkorrektur: $\text{mgv}(L-1, \dots)$
Korrektur: $C N^{(L)}$
- (v) Nachglättung: $C n_{GS} N^{(L)}$

$$\begin{aligned}
 \text{Also } M_L &= C N^{(L)} + M_{L-1} = C(N^{(L)} + N^{(L-1)}) + M_{L-2} \\
 &= C \sum_{i=1}^L N^{(i)} + M_0
 \end{aligned}$$

\uparrow ~~Wiederholung~~ Lösung durch Cholesky

In zwei Raumdimensionen ist $N^{(i)} \approx 4 N^{(i-1)}$, da jedes Dreieck aus T_{i-1} in vier Dreiecke zerlegt wird. Damit ist

$$\begin{aligned}
 M_L &= C N^{(L)} \cdot \sum_{i=0}^{L-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} + M_0 \\
 &\leq C N^{(L)} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + M_0 = \frac{4}{3} C N^{(L)} + M_0
 \end{aligned}$$

Also ist der Gesamtaufwand $M_{L, \text{max}} = O(N^{(L, \text{max})}) + M_0$ linear, wenn man M_0 vernachlässigt.

Beim W-Zyklus ersetzt man $M_L = C N^{(L)} + M_{L-1}$ durch $M_L = C N^{(L)} + 2 M_{L-1}$.

Aufwand für die geschichtete Iteration (V-Zyklus):

$$\begin{aligned}
& M_0 + \sum_{i=1}^{L-1} (cN^{(i)} + M_i) + cN^{(L)} \\
& \leq \frac{4}{3} cN^{(1)} + M_0 \\
& = L \cdot M_0 + c \cdot \frac{7}{3} \sum_{i=1}^{L-1} N^{(i)} + cN^{(L)} \\
& \leq L \cdot M_0 + c \cdot \frac{7}{3} \sum_{i=1}^L N^{(i)} \quad (N^{(L)} \approx 4N^{(L-1)} \approx 4^L N^{(1)}) \\
& \quad \quad \quad \approx 4^{i-L} N^{(L)} \\
& \approx LM_0 + c \cdot \frac{7}{3} N^{(L)} \underbrace{\sum_{i=1}^L 4^{i-L}}_{< \frac{4}{3}} \quad \left(\sum_{i=1}^L 4^{i-L} = \sum_{j=0}^{L-1} 4^j < \frac{1}{1-1/4} \right)
\end{aligned}$$

$\leq LM_0 + c \frac{28}{3} N^{(L)}$ \rightarrow Gesamtaufwand $O(N^{(L)}) + \overset{LM_0}{\text{konstant}}$,
d.h. im wesentlichen linear in $N^{(L_{max})}$.

9.5 Implementierung in Matlab

Hauptprogramm aufgabe 07.m

- Setze L_{max} , n_{GS} , n_V = Anzahl der V-Zyklen
- Lade die grobste Triangulierung und verfeinere sie rekursiv:

```
Rcell = cell(Lmax, 1)
```

```
for L = 1:Lmax
```

```
[T, P, EdgesDir, EdgesNew, R] = refine_triang(T, P, EdgesDir, EdgesNew)
```

```
Rcell{L} = R % Restriktionsmatrizen, Rcell{L}  $\cong$  r(L-1)
```

```
end
```

- Berechne Steifigkeitsmatrix und Lastvektor auf dem feinsten Gitter

$$[A, b, Tarea] = \text{computeAb}(T, P, \text{EdgesDir}, \text{EdgesNew})$$

- Zum Vergleich: Löse ~~direktes~~ LGS auf dem feinsten Gitter mit direktem Verfahren. Nutze aus, dass A spdi is:
 - opts.SYM = true; opts.POSDEF = true;
 - u_hat = \text{lsolve}(A, b, opts)

Ergänze Work auf dem Dirichlet-Rand: u_hat → u_FEM
 Berechne den L²-Fehler der FEM-Approximation durch Vergleich mit der exakten Lösung u_ex:

$$\text{err_direct} = \text{L2norm}(u_{FEM} - u_{ex}, T, Tarea)$$

- Berechne Restriktionen $A^{(L-1)} = r^{(L-1)} A^{(L)} (r^{(L-1)})^T$
 $b^{(L-1)} = r^{(L-1)} b^{(L)}$

$$A_{\text{cell}} = \text{cell}(L_{\text{max}} + 1, 1)$$

$$A_{\text{cell}}\{L_{\text{max}} + 1\} = A$$

$$b_{\text{cell}} = \text{cell}(L_{\text{max}} + 1, 1)$$

$$b_{\text{cell}}\{L_{\text{max}} + 1\} = b$$

for L = L_max : -1 : 1

$$A_{\text{cell}}\{L\} = \dots$$

$$b_{\text{cell}}\{L\} = \dots$$

end