(155)

- Berechne Startwert der Mehrgitter-Approximation

```
uhat0 = ...          (löse LGS auf Level 0 direkt), dann
                      Prolongation auf level 1)
for L = 2 : Lmax
    uhat0 = mgv(L-1, Acell(1:L), bcell{L}, uhat0, Rcell(1:L-1), n_GS)
    uhat0 = Rcell{L}' * uhat0      (Prolongation)
end
```

Berechne Fehler des Startwerts

- Berechne Mehrgitter-Approximation und Approximationsfehler

```
uhat_mgv = uhat0
for n = 1 : n_V
    uhat_mgv = mgv(Lmax, Acell, b, uhat_mgv, Rcell, n_GS)
    error_mgv = L2norm( ... )
end
```

(156)

```
function uhat = mgv(L, Acell, b, uhat, Rcell, n_GS)

A = Acell{L+1}
uhat = gauss_seidel(A, b, uhat, n_GS)
```

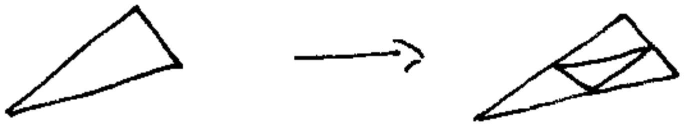
Defekt d berechnen, Restriktion

```
if L > 1
    epsilon = mgv(L-1, ... d ... )
else
    epsilon = linsolve(Acell{1}, d, opts)
end
```

Korrektur und Nachglättung

(157)

```
function [Tnew, Pnew, EdgesDirNew, EdgesNeuNew, R] =
         refine_triang(T, P, EdgesDir, EdgesNeu)
```



Punkte, die bereits in der alten Triangulierung vorhanden waren, ändern ihren Index nicht.

Berechne Restriktionsmatrix R

Tipp: Modifiziere die Funktion triag_lin2quad (Verbesserte Funktion! Musterlösung!) Aus Aufgabe 4.

(158)

```
function x = gauss_seidel(A, b, x, n_GS)
M = tril(A)
N = ...
opts.LT = true
for i = 1 : n_GS
    x = linsolve(M, ..., opts)
end
```

10. Finite Elemente für parabolische partielle Differentialgleichungen

Sei: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Definiere Differentialoperator (vgl. Kapitel 4 und 5)

$$\mathcal{A}w(x) = -\underbrace{\operatorname{div}(\mathcal{K}(x)\nabla w(x))}_{= \sum_{i=1}^{2} \partial_{x_i} \sum_{j=1}^{2} \kappa_{ij}(x)\partial_{x_j} w(x)} + \delta(x)w(x)$$

mit hinreichend glatten, beschränkten Koeffizientenfunktionen

$$\mathcal{K}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \delta: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \delta(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$$

$\mathcal{K}(x) = \mathcal{K}(x)^T$ symmetrisch

$\xi^T \mathcal{K}(x)\, \xi \geq c\, \|\xi\|_2^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2$ mit $c > 0$ unabhängig von x.

Betrachte das parabolische Anfangswertproblem

(10.1a) $\quad \partial_t u(t,x) + \mathcal{A}u(t,x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega,\ t > 0$

(10.1b) $\quad u(t,x) = g_D(x) \quad \forall x \in \Gamma_D$

(10.1c) $\quad \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial \eta_{K(x)}} = g_N(x) \quad \forall x \in \Gamma_N$

(10.1d) $\quad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{in } \overline{\Omega}$

mit Konormalen-Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_{\mathcal{K}(x)}} = \eta^T(x)\,\mathcal{K}(x)\nabla u(t,x), \quad \nabla = \nabla_x,\ \eta \text{ äußerer Normalenvektor}$$

und Funktionen $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $g_N: \Gamma_N \to \mathbb{R}$, $g_D: \Gamma_D \to \mathbb{R}$

O.B.d.A sei $g_D \equiv 0$. Zerlege sonst $u = w + u_*$ mit $u_*|_{\Gamma_D} = g_D$, $w|_{\Gamma_D} = 0$.

Die Lösung $u = u(t, x)$ ist eine Funktion in Raum und Zeit.
Anfangsbedingung (10.1d) muss kompatibel mit Randbedingungen (10.1b) und (10.1c) sein.

Linienmethode: Diskretisiere erst im Raum, dann in der Zeit

Variationelle Formulierung: Multipliziere (10.1a) mit Testfunktion v, integriere und wende die Greensche Formel an (vgl. Kap. 4+5). Erhalte

(10.2a) $$\int_\Omega (\partial_t u) v \, dx + a(u, v) = \ell(v)$$

(10.2b) $$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla v)^T \mathcal{K}(x) \nabla u \, dx + \int_\Omega \phi u v \, dx$$

(10.2c) $$\ell(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx - \int_{\Gamma_N} g_N v \, d\sigma(x)$$

<u>Definition 10.1</u>

Eine Funktion $u : [0, t_{end}] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt schwache Lösung von (10.1), falls

- $u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ für alle $t \in [0, t_{end}]$
- $u(t, \cdot) \in H^1_D(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega) : w\big|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$ für fast alle $t \in [0, t_{end}]$
- (10.2) an diesen t für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ erfüllt ist
- $\lim_{t \searrow 0} \| u(t, \cdot) - u_0 \|_{L^2(\Omega)} = 0$