(163)

Raumdiskretisierung durch lineare Finite Elemente:

Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ Basis von $V_h \subseteq H^1_D(\Omega)$ (Hütchenfunktionen)

Suche Approximation $u_h(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \hat{u}_j(t)\varphi_j(x) \in V_h$

Fordere $u_h(0,x) = \tilde{u}_0 \in V_h$, wobei $\tilde{u}_0 \approx u_0$ eine geeignete Approximation ist (z.B. stückweise lineare Interpolation von u_0 in den Punkten der Triangulierung.

Galerkin-Ansatz: Für $t \geq 0$ fordere

$$\int_\Omega (\partial_t u_h(t,x))\, v_h(x)\, dx = -a(u_h(t,\cdot), v_h) + \ell(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx\; \hat{u}_j'(t) = -\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_i, \varphi_j)\hat{u}_j(t) + \ell(\varphi_i)$$
$$\forall i = 1, \dots, N$$

(164)

$$\Leftrightarrow M\hat{u}'(t) = -A\hat{u}(t) + b$$

mit $A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j}$, $\quad M = \left(\int_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx\right)_{i,j}$

$b = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ \vdots \\ \ell(\varphi_N) \end{pmatrix}$, $\quad \hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_N \end{pmatrix}$

Also: PDE $\xrightarrow[\text{diskretisierung}]{\text{Raum-}}$ ODE wie bei Finiten Differenzen

Neu: Massematrix M auf der linken Seite

M ist symmetrisch und positiv definit. Cholesky: $M = LL^T$.
Für $\hat{w}(t) := L^T\hat{u}(t)$ gilt dann

$$\hat{w}'(t) = -L^{-1}AL^{-T}\hat{w}(t) + L^{-1}b$$

Zeitdiskretisierung

Die Matrix $L^{-1}AL^{-T}$ ist symmetrisch und positiv definit, und es gilt $\|L^{-1}AL^{-T}\| \longrightarrow \infty$ für $h \to 0$.

Verwende daher A-stabile ~~Zeitschrittverfahren~~ oder zumindest $A(\alpha)$-stabile Zeitschrittverfahren (Runge-Kutta, BDF, ...).

~~Beispiele:~~ Für $t_n = n\tau$ mit Schrittweite τ approximiere $\hat{w}(t_n) \approx \hat{w}^n$ bzw. $\hat{u}(t_n) \approx \hat{u}^n$. Beispiele:

- Implizites Euler-Verfahren
$$\hat{w}^{n+1} = \hat{w}^n - \tau L^{-1}AL^{-T}\hat{w}^{n+1} + \tau L^{-1}b$$
$$\Leftrightarrow (M + \tau A)\hat{u}^{n+1} = M\hat{u}^n + \tau b$$
- Implizite Mittelpunktsregel
$$\hat{w}^{n+1} = \hat{w}^n - \frac{\tau}{2} L^{-1}AL^{-T}(\hat{w}^{n+1} + \hat{w}^n) + \tau L^{-1}b$$
$$\Leftrightarrow (M + \tfrac{\tau}{2}A)\hat{u}^{n+1} = (M - \tfrac{\tau}{2}A)\hat{u}^n + \tau b$$

Brauche also Umformulierung mit $\hat{w}$ nicht.

11. Anwendung 2: Räuber-Beute-Systeme

11.1 Modellierung

Betrachte zwei Populationen in einem Gebiet Ω: Räuber- und Beutetiere

~~Ma~~

(a) Modellierung durch ODEs

Sei u_1 Anzahl der Räuber, u_2 Anzahl der Beutetiere

Kontinuumshypothese: ~~[illegible]~~ $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sind reellwertig (und positiv) anstelle von ganzen Zahlen.

Weitere Annahme: Räumliche Homogenität, d.h. alle Individuen („Teilchen") bewegen sich zufällig und mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb von Ω.

Sei $t \geq 0$ und $0 < \tau \ll 1$ klein.

Modellannahmen

(A1) Anzahl der Räuber, die in $[t, t+\tau]$ sterben, ist
$\tau c_1 u_1(t) + O(\tau^2)$

(A2) Anzahl der Beutetiere, die in $[t, t+\tau]$ sterben, ist
$\tau c_2 u_2(t) + O(\tau^2)$

(A3) Anzahl der in $[t, t+\tau]$ neu geborenen Räuber ist
$\tau c_3 u_1(t) u_2(t) + O(\tau^2)$

(A4) Anzahl der in $[t, t+\tau]$ neu geborenen Beutetiere ist
$\tau (c_4 u_2(t) - \underbrace{c_5 u_2^2(t)}_{\text{„soziale Reibung"}}) + O(\tau^2)$

(A5) Anzahl der in $[t, t+\tau]$ von Räubern getötete Beutetiere ist
$\tau c_6 u_1(t) u_2(t) + O(\tau^2)$

168

Also gilt

$$u_1(t+\tau) = u_1(t) + \tau \left(c_3 u_2(t) - c_1 \right) u_1(t) + O(\tau^2)$$

$$u_2(t+\tau) = u_2(t) + \tau \left(c_4 - c_5 u_2(t) - c_2 - c_6 u_1(t) \right) u_2(t) + O(\tau^2)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}_1(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{u_1(t+\tau) - u_1(t)}{\tau} = \underbrace{\left(c_3 u_2(t) - c_1 \right) u_1(t)}_{=: F_1(u_1(t), u_2(t))}$$

$$\dot{u}_2(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{u_2(t+\tau) - u_2(t)}{\tau} = \underbrace{\left(c_4 - c_5 u_2(t) - c_2 - c_6 u_1(t) \right) u_2(t)}_{=: F_2(u_1(t), u_2(t))}$$

Bemerkung: In diesem Modell werden viele Aspekte nicht berücksichtigt, wie z.B. Geschlecht oder Alter der Individuen, Interaktion mit anderen Spezies, usw.

Die Konstanten c_i können auch von Zeit und Raum abhängen.

(6) Modellierung durch PDEs

Jetzt: Nehme keine räumliche Homogenität mehr an, d.h. an verschiedenen Stellen von Ω befinden sich unterschiedlich viele Räuber- bzw. Beutetiere.

Für $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ sei

$$\int_{\tilde{\Omega}} u_1(t,x)\,dx = \text{Anzahl der Räuber in } \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} u_2(t,x)\,dx = \text{Anzahl der Beutetiere in } \tilde{\Omega} \subseteq \Omega$$

Annahme: Einzelne Räuber- oder Beutetiere bewegen sich zufällig im Raum (d.h. nicht gezielt aufeinander zu bzw. voneinander weg)

Sei zunächst $c_1 = \ldots = c_6 = 0$.
Betrachte beliebiges Teilgebiet $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ mit Rand $\tilde{\Gamma}$.

Für $t_0 \geq 0$, $\tau > 0$, $i \in \{1,2\}$ gilt dann Massenbilanz:

$$\int_{\tilde{\Omega}} u_i(t_0+\tau, x)\,dx = \int_{\tilde{\Omega}} u_i(t_0,x)\,dx - \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{\tilde{\Gamma}} J_i(t,x)^T \tilde{\eta}(x)\,d\sigma(x)\,dt}_{\text{Ausfluss über den Rand}}$$

Dabei ist $J : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ die Stromdichte und $\tilde{\eta}(x)$ der äußere Normalenvektor von $\tilde{\Gamma}$.

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_{\tilde{\Gamma}} J_i(t,x)^T \tilde{\eta}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div}(J_i(t,x))\,dx$$

Einsetzen:

$$\int_{\tilde\Omega} u_i(t_0+\tau, x)\,dx = \int_{\tilde\Omega} u_i(t_0,x)\,dx - \int_{\tilde\Omega}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \operatorname{div}(J_i(t,x))\,dt\,dx$$

Da dies für beliebige $\tilde\Omega$ gilt, folgt für alle $x \in \Omega$

$$u_i(t_0+\tau, x) = u_i(t_0,x) - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \operatorname{div}(J_i(t,x))\,dt$$

Vergleich mit

$$u_i(t_0+\tau, x) = u_i(t_0,x) + \int_{t_0}^{t_0+\tau} \partial_t u_i(t,x)\,dt$$

liefert die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t u_i(t,x) = -\operatorname{div}(J_i(t,x)) \qquad \forall t>0,\ x\in\Omega$$

(172)

Erstes Fick'sches Gesetz: Die Stromdichte ist proportional zum negativen Konzentrationsgradienten, d.h.

$$J_i(t,x) = -D_i \nabla u_i(t,x)$$

mit Diffusionskonstante $D_i > 0$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t u_i(t,x) = \operatorname{div}(D_i \nabla u_i(t,x)) = D_i \Delta u_i(t,x)$$

$\rightarrow$ Wärmeleitungsgleichung

Randbedingungen? Nehme an, dass sich keine Individuen über den Rand Γ aus Ω hinaus- bzw. in Ω hineinbewegen können $\Rightarrow$ homogene ~~Dirichlet~~-Randbedingungen
Neumann