12. Finite Volumen und Discontinuous Galerkin Methods

12.1 Ein Modellproblem

Erhaltungsgleichung auf $[0,L]$, $L>0$:

$$
\begin{aligned}
\partial_t u(t,x) + \partial_x f(u(t,x)) &= 0 && \forall t>0,\ x\in [0,L] \\
u(t,0) &= u(t,L) && \forall t\geq 0 \quad \text{periodische Randbedingung} \\
u(0,x) &= u_0(x) && \forall x\in (0,L]
\end{aligned}
$$

Dabei sind $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $u_0:[0,L]\to\mathbb{R}$ hinreichend glatte Funktionen

Beispiel 1: $f(u) = au$ mit Konstante $a>0$.

$$\partial_t u(t,x) + a\partial_x u(t,x) = 0$$

Lösung: $u(t,x) = u_0(at-x)$ (setze u_0 periodisch auf $\mathbb{R}$ fort, d.h. $u_0(x+L) = u_0(x)$.)

(184)

Beispiel 2: $f(u) = \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow$ Burgers-Gleichung

$$\partial_t u(t,x) + u(t,x)\,\partial_x u(t,x) = 0 \qquad \text{(nichtlinear)}$$

Für $[a,b]\subseteq[0,L]$ beliebig gilt

$$
\begin{aligned}
\int_a^b u(t,x)\,dx &= \int_a^b u(0,x)\,dx + \int_0^t\int_a^b \underbrace{\partial_t u(s,x)}_{=-\partial_x f(u(s,x))}\,dx\,ds \\
&= \int_a^b u(0,x)\,dx - \int_0^t f(u(s,b)) - f(u(s,a))\,ds
\end{aligned}
$$

Interpretation: Masse zur Zeit t = Masse zur Zeit 0 +
+ Einstrom an $x=a$ in $[0,t]$
− Ausfluss an $x=b$ in $[0,t]$

Wegen $u(t,0)=u(t,L)$ gilt insbesondere

$$\int_0^L u(t,x)\,dx = \int_0^L u(0,x)\,dx \quad \forall t\geq 0 \Rightarrow \text{Massenerhaltung.}$$

Definiere Hütchenfunktionen φ_j, d.h. $\varphi_j\big|_{[x_k, x_{k+1}]}$ linear,

$$\varphi_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze $V_h := \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$

Approximiere $u(t,x) \approx u_h(t,x) := \sum_{j=1}^{m} \hat{u}_j(t)\varphi_j(x) \in V_h$

(Globale) Galerkin-Bedingung: Fordere

$$\int_0^L \partial_t u_h(t,x)\, v_h(x)\, dx = \int_0^L f(u_h(t,x))\, v_h'(x)\, dx \qquad \forall v_h \in V_h$$

Wähle insbesondere $v_h := \varphi_j$. Approximiere $f(u_h(t,x)) \approx \sum_{j=1}^{m} f(\hat{u}_j(t))\varphi_j(x)$ lin. Interpolation

Erhalte

$$M\hat{u}'(t) = A f(\hat{u}(t))$$

mit Massematrix $M = \left(\int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times m}$

und Steifigkeitsmatrix $A = \left(\int_0^L \varphi_i'(x)\varphi_j(x)\, dx \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m\times m}$

Bei hyperbolischen Problemen werden (anders als bei parabolischen Problemen) oft explizite Zeitschrittverfahren verwendet.

CFL-Bedingung $\tau \le ch$ (statt $\tau \le ch^2$)

Aufgrund der Massematrix sind explizite Verfahren jedoch nicht direkt anwendbar.

⊕ Geometrisch flexibel
⊕ Höhere Ordnung möglich
⊕ Niedrige Regularität

? Upwind-Diskretisierung
⊖ Massematrix
? Massenerhaltung

12.2 Vor- und Nachteile verschiedener Randdiskretisierungen

(185)

~~...~~ Wähle $m \in \mathbb{N}$, setze $h = \frac{L}{m}$, $x_k = kh$, $k = 0, \dots, m-1$

Periodische Randbedingungen $\Rightarrow$ Identifiziere $x_{k+m} \hat{=} x_k$

Bemerkung: Nicht-äquidistante Zerlegung wäre auch möglich.

(a) Finite Differenzen

$$\dot{u}_k(t) + \frac{f(u_{k+1}(t)) - f(u_{k-1}(t))}{2h} = 0, \qquad u_k(t) \approx u(t, x_k)$$

$$u_{k+m}(t) = u_k(t)$$

Zentrale Finite Differenzen führen bei hyperbolischen Problemen manchmal zu Instabilitäten. Alternative: Upwind - Diskretisierung

Für $f(u) = au$ mit $a > 0$ wähle

$$\dot{u}_k(t) + \frac{f(u_k(t)) - f(u_{k-1}(t))}{h} = 0$$

Nachteil: Nur Ordnung 1 in h

Vorteil: Stabiler. Der einseitige Differenzenquotient zeigt in die Richtung, aus der die Information kommt.

(186)

⊕ Konzeptuell einfach

⊕ Höhere Ordnung möglich

⊕ Upwind-Diskretisierung

⊕ Massenerhaltung: $\sum_k \dot{u}_k(t) = 0$

⊖ Keine Erweiterung auf beliebige Gebiete in $\mathbb{R}^d$, $d > 1$

⊖ Hohe Regularitätsvoraussetzungen

(b) Lineare Finite ~~Differenzen~~ Elemente

Schwache Formulierung: Suche $u(t, \cdot) \in V := \{ v \in H^1(\Omega) : v(0) = v(L) \}$ derart, dass

$$\int_0^L \partial_t u(t,x) v(x)\, dx + \underbrace{\int_0^L \big(\partial_x f(u(t,x))\big) v(x)\, dx}_{= \left[f(u(t,x)) v(x) \right]_0^L - \int_0^L f(u(t,x)) v'(x)\, dx} = 0$$

$$\forall v \in V$$

(c) Finite Volumen

Setze $x_{k+1/2} := \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) = x_k + \frac{h}{2}$

Integriere PDE und approximiere $u(t,x) \approx \bar{u}_k(t)$ für $x \in [x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}}]$:

$$\underbrace{\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \partial_t u(t,x)\,dx}_{\approx h\,\bar{u}_k'(t)} + \underbrace{\int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \partial_x f\big(u(t,x)\big)\,dx}_{= f(u(t,x_{k+1/2})) - f(u(t,x_{k-1/2}))} = 0$$

Rekonstruktionsproblem: Keine eindeutige Approximation für $u(t,x_{k+1/2})$