

Approximiere z. D. $u(t, x_{k+1/2}) \approx \frac{\bar{u}_{k+1}(t) + \bar{u}_k(t)}{2} =: u_{k+1/2}(t)$

(190)

erhalte

$$\bar{u}'_k(t) = - \frac{f(u_{k+1/2}(t)) - f(u_{k-1/2}(t))}{h}$$

$$\text{Massenerhaltung: } \sum_{k=1}^m \bar{u}'_k(t) = 0$$

Bemerkung: für $f(u) = au$ sind Finite Volumen identisch zu zentralen Finite Differenzen. Für $u_{k+1/2} = \bar{u}_k$ erhält man die Upwind-Variante.

- ⊕ Geometrisch flexibel
- ⊕ Niedrige Regularität
- ⊕ Massenerhaltung
- ⊕ Upwind-Diskretisierung möglich

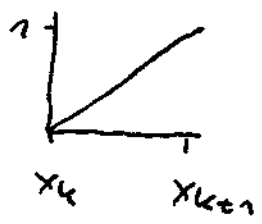
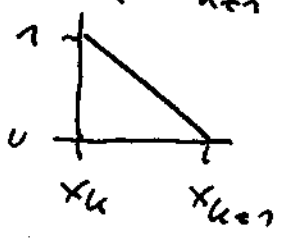
⊖ ~~Wasser~~ Höhere Ordnung?

Gibt es ein Verfahren, das die Vorteile von finiten Differenzen und finiten Volumen kombiniert?

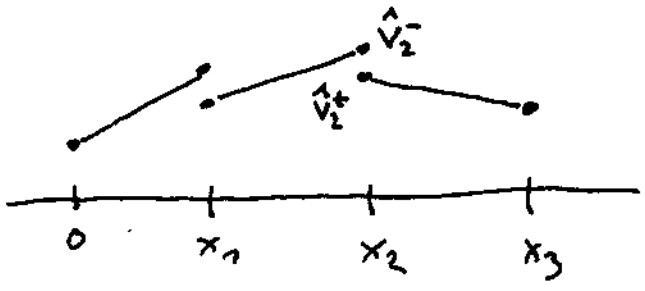
(d) Discontinuous Galerkin Methods

Definiere $V_h := \{v_h : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, v_h(x) = \hat{v}_k^+ l_0^k(x) + \hat{v}_{k+1}^- l_1^k(x)\}$
für $x \in [x_k, x_{k+1}]$

Dabei ist $l_0^k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$, $l_1^k(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$



Funktionen aus V_h sind ~~stetig~~ stückweise linear, aber unstetig an den Stellen x_1, \dots, x_n , falls $\hat{v}_k^+ \neq \hat{v}_k^-$



Approximiere $u(t, \cdot) \approx u_h(t, \cdot) \in V_h$

$$u_h(t, x) = \hat{u}_k^+(t) l_0^k(x) + \hat{u}_{k+1}^-(t) l_1^k(x) \quad \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}]$$

Sei $f(u) \approx f_h \in V_h$, $f_h(t, x) = f(\hat{u}_k^+(t)) l_0^k(x) + f(\hat{u}_{k+1}^-(t)) l_1^k(x)$

(stückweise lineare Interpolation von $f(u_h)$) für $x \in [x_k, x_{k+1}]$

Galerkin - Ansatz auf jedem Intervall: \forall Teste für alle $t \geq 0$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \partial_t u_h(t, x) v_h(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\partial_x f_h(t, x)) v_h(x) dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

$\forall k = 1, \dots, m$

$$\Leftrightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} \partial_t u_h(t, x) v_h(x) dx + \left[f_h(t, x) v_h(x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_h(t, x) \partial_x v_h(x) dx = 0$$

$\forall v_h \in V_h$
 $\forall k = 1, \dots, m$

Problem: Was ist $f_h(t, x_k)$? Der Wert an den Intervallgrenzen ist nicht eindeutig:

$$\lim_{x \nearrow x_k} f_h(t, x) = f(\hat{u}_k^+(t)) \neq f(\hat{u}_k^-(t)) = \lim_{x \searrow x_k} f_h(t, x)$$

Vgl. Rekonstruktionsprobleme bei finiten Volumen.

Wähle einen eindeutig bestimmten numerischen Fluss f^* an den Intervallgrenzen, der Information der Approximation u_h aus beiden angrenzenden Intervallen erhält. Für $v_h = l_i^k$ mit $i \in \{0, 1\}$ erhält man

$$\frac{d}{dt} \hat{u}_k^+(t) \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_0^k(x) l_i^k(x) dx + \frac{d}{dt} \hat{u}_{k+1}^-(t) \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_1^k(x) l_i^k(x) dx$$

~~...~~

~~z.B. $f^*(x_k, u_h) = \frac{1}{2} (f(\hat{u}_k^+(t)) + f(\hat{u}_k^-(t)))$~~

z.B. $f^*(x_k, u_h) = \frac{1}{2} (f(\hat{u}_k^+(t)) + f(\hat{u}_k^-(t)))$

$$= - f^*(x_{k+1}) l_i^k(x_{k+1}) + f^*(x_k) l_i^k(x_k) + f(\hat{u}_k^+(t)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_0^k(x) \partial_x l_i^k(x) dx + f(\hat{u}_{k+1}^-(t)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} l_1^k(x) \partial_x l_i^k(x) dx$$

Definiere lokale Masse- und Steifigkeitsmatrix:

$$M^k := \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} l_j^k(x) l_i^k(x) dx \right)_{i,j=0,1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A^k = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} l_j^k(x) \partial_x l_i^k(x) dx \right)_{i,j=0,1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow M^k \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{u}_k^+(t) \\ \hat{u}_{k+1}^-(t) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} \hat{f}(\hat{u}_k^+(t)) \\ \hat{f}(\hat{u}_{k+1}^-(t)) \end{pmatrix} + f^*(x_k) \begin{pmatrix} l_0^k(x_k) \\ l_1^k(x_k) \end{pmatrix}$$

$$k=1, \dots, m, \quad k+1 \hat{=} k \\ = A^k \begin{pmatrix} \hat{f}(\hat{u}_k^+(t)) \\ \hat{f}(\hat{u}_{k+1}^-(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^*(x_k) \\ -f^*(x_{k+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_0^k(x_{k+1}) \\ l_1^k(x_{k+1}) \end{pmatrix}$$

Die Dynamik auf verschiedenen Intervallen ist nur über deren numerisches Fluss f^* gekoppelt. Die globale Massmatrix

$$M = \begin{pmatrix} M^1 & & & \\ & M^2 & & \\ & & M^3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist block-diagonal und kann daher billig invertiert werden.

- ⊕ Geometrisch flexibel
- ⊕ Niedrige Regularität
- ⊕ Upwind-Discretisierung möglich
- ⊕ Höhere Ordnung möglich

- ⊖ Verdopplung der Unbekannten an den Grenzen zwischen Elementen