1 PDE-Modelle

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend ($d = 2$ oder 3).
Wir beschreiben die Verteilung der Konzentration oder Dichte eines Stoffes

$$u \colon [0, T] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

und deren Fluss

$$\sigma \colon [0, T] \times \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

mit der Bilanzgleichung (bzgl. Quellen/Senken f und Reaktionsrate r)

$$\int_K \big(u(t_2, x) - u(t_1, x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial K} \sigma(t, x) \cdot n_K(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Big(r(t, x)u(t, x) + f(t, x)\Big)\,\mathrm{d}x$$

für alle $K \subset \Omega$ und $(t_1, t_2) \subset [0, T]$, und mit einem Materialgesetz der Form

$$\sigma = -\kappa \nabla u + qu$$

abhängig von dem Permeabilitätstensor $\kappa(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und dem Flussvektor $q(x) \in \mathbb{R}^d$.

(1.1) Wenn u hinreichend glatt ist, folgt aus dem Satz von Gauß $\partial_t u + \operatorname{div} \sigma = ru + f$ und

$$\partial_t u - \operatorname{div}(\kappa \nabla u) + q \cdot \nabla u + (\operatorname{div} q - r)u = f\,.$$

Stationäre Spezialfälle: Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$, Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$

(1.2) Elektro-magnetische Wellen werden im Vakuum durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben:

$$\varepsilon_0 \partial_t E - \nabla \times H = 0\,, \quad \mu_0 \partial_t H + \nabla \times E = 0\,, \quad \operatorname{div}(\varepsilon_0 E) = 0\,, \quad \operatorname{div}(\mu_0 H) = 0\,.$$

2 Schwache Ableitungen

(2.1) Sei $L\colon \mathrm{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathrm{L}_\infty(\Omega,\mathbb{R}^k)$ ein linearer Differentialoperator erster Ordnung. Dann ist $L^*: \mathrm{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathrm{L}_\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ der adjungierte Differentialoperator, wenn

$$\int_\Omega Lu\cdot\phi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\cdot L^*\phi\,\mathrm{d}x\,, \qquad u\in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega,\mathbb{R}^m)\,,\ \phi\in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega,\mathbb{R}^k)\,,$$

z.B. $L=\nabla \Rightarrow L^* = -\operatorname{div}$, $L=\operatorname{div} \Rightarrow L^* = -\nabla$, $L=\operatorname{curl} \Rightarrow L^* = \operatorname{curl}$, $L=\partial_d \Rightarrow L^* = -\partial_d$.

(2.2) Für $u\in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $w\in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^k)$ gelte

$$\int_\Omega w\cdot\phi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\cdot L^*\phi\,\mathrm{d}x\,, \qquad \phi\in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega,\mathbb{R}^k)\,.$$

Dann heißt w *schwache Ableitung* (bzgl. L) von u.

(2.3) Die schwache Ableitung ist in $\mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^M)$ eindeutig. Wir schreiben daher $w = Lu$. Sei

$\mathrm{H}(L,\Omega) = \big\{u\in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^m)\colon\ w\in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^k)$ existiert mit $(w,\phi)_{0,\Omega} = (u,L^*\phi)_{0,\Omega}\,,\ \phi\in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega,\mathbb{R}^k)\big\}$.

Bezeichnung: $(w,\psi)_{0,\Omega} = \int_\Omega w\cdot\psi\,\mathrm{d}x$ und $\|w\|_{0,\Omega} = \sqrt{(w,w)_{0,\Omega}}$.

(2.4) $\mathrm{H}(L,\Omega)$ ist ein Hilbertraum bzgl. $\|u\|_{L,\Omega} = \sqrt{\|u\|^2_{0,\Omega} + \|Lu\|^2_{0,\Omega}}$.
$\mathrm{H}_0(L,\Omega)\subset \mathrm{H}(L,\Omega)$ sei der Abschluss von $C^1_\mathrm{c}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ bzgl. $\|\cdot\|_{L,\Omega}$.

Bezeichnungen: $\mathrm{H}^1(\Omega) := \mathrm{H}(\nabla,\Omega)$, $\mathrm{H}(\operatorname{div},\Omega)$, $\mathrm{H}(\operatorname{curl},\Omega)$

2 Schwache Ableitungen

(2.5) Der Quotientenraum $\widehat{\mathrm{H}}(L,\partial\Omega) = \mathrm{H}(L,\Omega)/\mathrm{H}_0(L,\Omega)$ heißt Spurraum von L.
Es ist ein Hilbertraum mit der Norm $\|\hat{u}\|_{L,\partial L} = \inf_{\hat{u}=u+\mathrm{H}_0(L,\Omega)} \|u\|_{L,\Omega}$.

(2.5) Zu den linearen Differentialoperatoren L, L^* existiert ein Spuroperator
$B\colon \mathrm{C}^0(\partial\Omega,\mathbb{R}^m) \to \mathrm{L}_\infty(\partial\Omega,\mathbb{R}^k)$

$$\int_{\partial\Omega} Bu\cdot\phi\,\mathrm{d}a = \int_\Omega Lu\cdot\phi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\cdot L^*\phi\,\mathrm{d}x\,.$$

Die Spurabbildung ist stetig fortsetzbar nach $\mathrm{H}(L,\Omega) \longrightarrow \widehat{\mathrm{H}}(L,\partial\Omega)$.

(2.5) Sei $L\colon \mathrm{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathrm{L}_\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ ein linearer Differentialoperator, und wähle $\Gamma_j \subset \partial\Omega$.

a) $u \in \mathrm{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\cap\mathrm{C}^0(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)$ heißt *klassische Lösung*, wenn

$$Lu = f \text{ in } \Omega\,, \qquad (Bu)_j = g_j \text{ auf } \Gamma_j\,,\ j = 1,\dots,m$$

für $f \in \mathrm{C}^0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $g_j \in \mathrm{C}^0(\Gamma_j)$ gilt.

b) $u \in \mathrm{H}(L,\Omega)$ heißt *starke Lösung*, wenn

$$Lu = f \text{ in } \Omega\,, \qquad (Bu)_j = g_j \text{ auf } \Gamma_j\,,\ j = 1,\dots,m$$

für $f \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $g_j \in \mathrm{L}_2(\Gamma_j)$ gilt.

c) $u \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^m)$ heißt *schwache Lösung*, wenn

$$(u, L^*\phi)_{0,\Omega} = (f,\phi)_{0,\Omega} - \big(g,\phi\big)_{0,\partial\Omega}\,, \qquad \phi \in \mathcal{V}^*$$

für $f \in \mathrm{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^m)$ und $g \in \mathrm{L}_2(\partial\Omega,\mathbb{R}^m)$ gilt, wobei

$$\mathcal{V}^* = \big\{v \in \mathrm{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\cap\mathrm{C}^0(\bar{\Omega},\mathbb{R}^m)\colon (B^\top v)_j = 0 \text{ auf } \partial\Omega\setminus\Gamma_j\,,\ j = 1,\dots,m\big\}\,.$$

3 Triangulierungen und elementare Finite Elemente

(3.1) Ein offener Simplex $K \subset \mathbb{R}^d$ ist durch $\bar{K} = \mathrm{conv}\{z_{K,0}, z_{K,1}, \dots, z_{K,d}\}$ bestimmt.
Eine zulässige Triangulierung $\mathcal{K}_h$ ist eine Zerlegung von Ω mit $\Omega_h = \bigcup_{K\in\mathcal{K}_h} K$ und

$$\mathrm{conv}(\mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_{K'}) = \mathrm{conv}(\mathcal{V}_K) \cap \mathrm{conv}(\mathcal{V}_{K'}) \,, \qquad K, K' \in \mathcal{T}_h \,.$$

$\mathcal{V}_K$, $\mathcal{E}_K$, $\mathcal{F}_K$ seien die Ecken, Kanten und Flächen in K und $\mathcal{V}_h$, $\mathcal{E}_h$, $\mathcal{F}_h$ in $\mathcal{K}_h$.

(3.2) Sei $\Omega_h = \bigcup K$ und $\mathbb{P}(\Omega_h) = \prod \mathbb{P}(K)$. Zu $F \in \mathcal{F}_K \setminus \partial\Omega$ sei K_F der Nachbar mit $\bar{F} = \partial K \cap \partial K_F$.

a) $u \in \mathbb{P}(\Omega_h) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)$ genau dann, wenn $u_K = u_{K_F}$ für alle $F \in \mathcal{F}_K \setminus \partial\Omega$, $K \in \mathcal{K}_h$
b) $v \in \mathbb{P}(\Omega_h, \mathbb{R}^d) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega)$ genau dann, wenn $(v_K - v_{K_F}) \cdot n_K = 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_K \setminus \partial\Omega$.
c) $w \in \mathbb{P}(\Omega_h, \mathbb{R}^3) \cap \mathrm{H}(\mathrm{curl}, \Omega)$ genau dann, wenn $(w_K - w_{K_F}) \times n_K = 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_K \setminus \partial\Omega$.

(3.3) Auf jedem Simplex K definieren wir die Finite-Elemente-Räume mit $u_K = u|_K$

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0(K) &= \{u_K \in \mathbb{P}_0(K) \colon u_K(x) = a_0 \colon a_0 \in \mathbb{R}\} \,,\\
\mathrm{S}_1(K) &= \{u_K \in \mathbb{P}_1(K) \colon u_K(x) = a_0 + a \cdot x \colon (a_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\} \,,\\
\mathrm{S}(\mathrm{div}, K) &= \{v_K \in \mathbb{P}_1(K, \mathbb{R}^d) \colon v_K(x) = a + b_0 x \colon (a, b_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\} \,,\\
\mathrm{S}(\mathrm{curl}, K) &= \{w_K \in \mathbb{P}_1(K, \mathbb{R}^3) \colon w_K(x) = a + b \times x \colon (a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\} \,,\\
\mathrm{S}^0(\Omega_h) &= \{u \in \mathrm{L}_2(\Omega) \colon u_K \in \mathrm{S}_0(K)\} \,,\\
\mathrm{S}^1(\Omega_h) &= \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \colon u_K \in \mathrm{S}_1(K)\} \,,\\
\mathrm{S}(\mathrm{div}, \Omega_h) &= \{v \in \mathrm{H}(\mathrm{div}, \Omega) \colon v_K(x) \in \mathrm{S}(\mathrm{div}, K)\} \,,\\
\mathrm{S}(\mathrm{curl}, \Omega_h) &= \{w \in \mathrm{H}(\mathrm{curl}, \Omega) \colon w_K \in \mathrm{S}(\mathrm{curl}, K)\} \,.
\end{aligned}$$

3 Triangulierungen und elementare Finite Elemente

(3.3) Ein Finites Element ist ein Tripel (K, V_K, Λ_K) mit:

$$K \subset \mathbb{R}^d \text{ Zelle}$$
$$V_K \subset L_2(K, \mathbb{R}^m) \text{ Vektorraum mit } N_K = \text{div } V_K < \infty$$
$$\Lambda_K = span\{\lambda'_{K,1}, \dots, \lambda'_{K,N_K}\} \subset V'_K \text{ Freiheitsgrade im Dualraum,}$$

so dass jedes $v \in V_K$ ist eindeutig durch $\langle \lambda'_{k,j}, v\rangle \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, N_K)$ bestimmt ist, d.h. aus $\langle \lambda_{K,j}, v\rangle = 0$ für $j = 1, \dots, N_K$ folgt $v = 0$.

Wähle eine Orientierung für die Normale n_F und Tangente τ_E.

a) Der Freiheitsgrade η'_K in $\mathrm{S}_0(K)$ ist das Element-Integral
$$\langle \eta'_K, u\rangle = \int_K u \,\mathrm{d}x\,, \qquad u \in \mathrm{S}_0(K)\,.$$

b) Die Freiheitsgrade λ'_z in $\mathrm{S}_1(K)$ sind die Punktauswertungen
$$\langle \lambda'_z, u\rangle = u(z)\,, \qquad u \in \mathrm{S}_1(K),\ z \in \mathcal{V}_K\,.$$

c) Die Freiheitsgrade ψ'_F in $\mathrm{S}(\text{div}, K)$ sind die Seitenintegrale
$$\langle \psi'_F, v\rangle = \int_F v \cdot n_F \,\mathrm{d}a\,, \qquad v \in \mathrm{S}(\text{div}, K),\ F \in \mathcal{F}_K\,.$$

d) Die Freiheitsgrade ϕ'_E in $\mathrm{S}(\text{curl}, K)$ sind die Kantenintegrale
$$\langle \phi'_E, u\rangle = \int_E v \cdot \tau_E \,\mathrm{d}s\,, \qquad v \in \mathrm{S}(\text{curl}, K),\ E \in \mathcal{E}_K\,.$$

3 Triangulierungen und elementare Finite Elemente

Sei $\hat{K} = \operatorname{conv}\{\hat{z}_0, ..., \hat{z}_d\}$ der Referenzsimplex und $\varphi_K : \hat{K} \longrightarrow \bar{K}$ linear affin mit $\varphi_K(\hat{x}) = z_{K,0} + B_K\hat{x}$, $B_K = (z_{K,1} - z_{K,0}| \dots |z_{K,d} - z_{K,0})$ und $J_K = \det B_K > 0$.

a) $\mathrm{S}^0(K) = \operatorname{span}\{\eta_K\}$ mit $\eta_K \equiv |K|^{-1}$.
b) $\mathrm{S}^1(K) = \operatorname{span}\{\lambda_z : z \in \mathcal{V}_K\}$ mit $\lambda_z(z) = 1$ und $\lambda_z(y) = 0$ für $y \in \mathcal{V}_K \setminus \{z\}$.
Es gilt $\lambda_{z_{K,0}}(x) = 1 - \hat{x}_1 - \dots - \hat{x}_d$ und $\lambda_{z_{K,j}}(x) = \hat{x}_j$ für $j = 1, \dots, d$ mit $x = \varphi_K(\hat{x})$.
c) $\mathrm{S}(\operatorname{div}, K) = \operatorname{span}\{\psi_F : F \in \mathcal{F}_K\}$ mit $\psi_{F_j}(x) = \frac{n_K \cdot n_{F_j}}{|F_j|}(x - z_{K,j})$, $j = 0, \dots, d$ und $x = \varphi_K(\hat{x})$. Dabei sei $F_j \in \mathcal{F}_K$ die Seite gegenüber von $z_{K,j}$.
d) $\mathrm{S}(\operatorname{curl}, K) = \operatorname{span}\{\phi_E : E \in \mathcal{E}_K\}$ mit $\phi_E = \lambda_z \nabla\lambda_y - \lambda_y \nabla\lambda_z$, $\bar{E} = \operatorname{conv}\{y, z\}$, $\tau_E = z - y$.

(3.4) In Ω gilt:
a) $\mathrm{S}^0(\Omega_h) = \operatorname{span}\{\eta_K : K \in K_h\}$ mit $\eta_K(x) = 0$ für $x \notin K$.
b) $\mathrm{S}^1(\Omega_h) \subset \mathrm{C}^0(\bar{\Omega})$, so dass die Freiheitsgerade λ_z' in $\mathrm{S}^1_h(\Omega)$ und die Fortsetzungen der Basisfunktionen λ_z in $\bar{\Omega}$ wohldefiniert sind. Es gilt $\lambda_z(x) = 0$ falls $x \notin \bar{K}$ und $z \notin \mathcal{V}_K$.
c) Die Freiheitsgrade ψ_F' und die Fortsetzungen der Basisfunktionen ψ_F sind in $\bar{\Omega}$ wohldefiniert. Es gilt $\mathrm{S}(\operatorname{div}, \Omega) = \operatorname{span}\{\psi_F : F \in \mathcal{F}_h\}$ und $\psi_F(x) = 0$ für $x \notin \bar{K} \cup \bar{K}_F$.
d) Die Freiheitsgrade ϕ_E' und die Fortsetzungen der Basisfunktionen ϕ_E sind in $\bar{\Omega}$ wohldefiniert. Es gilt $\mathrm{S}(\operatorname{curl}, \Omega) = \operatorname{span}\{\phi_E : E \in \mathcal{E}_h\}$ und $\phi_E(x) = 0$ falls $x \notin \bar{K}$ und $E \notin \mathcal{E}_K$.

(3.5) a) Für alle $u_h \in \mathrm{S}^0_h(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ existiert $u^\varepsilon \in \mathrm{C}^1_\mathrm{c}(\Omega)$ mit $\|u_h - u^\varepsilon\|_0 \leq \varepsilon$.
b) $u_h \in \mathrm{S}^1(\Omega_h) \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ genau dann, wenn $u_h(z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{V}_h \cap \partial\Omega$.
c) $v_h \in \mathrm{S}(\operatorname{div}, \Omega_h) \cap \mathrm{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$ genau dann, wenn $v_h \cdot n_F \equiv 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_h \cap \partial\Omega$.
d) $w_h \in \mathrm{S}(\operatorname{curl}, \Omega_h) \cap \mathrm{H}_0(\operatorname{curl}, \Omega)$ genau dann, wenn $w_h \cdot \tau_E \equiv 0$ für alle $E \in \mathcal{E}_h \cap \partial\Omega$.

4 Galerkin-Verfahren

(4.1) Sei V ein Hilbert-Raum, $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und elliptische Bilinearform, und $\ell\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Linearform, d.h.,

$$C_a = \sup_{v,w\neq 0} \frac{|a(v,w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} < \infty\,, \qquad \|\ell\|_{V'} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle \ell, v\rangle|}{\|v\|_V} < \infty\,,$$

und $c_a > 0$ existiert mit

$$a(v,v) \geq c_a \|v\|_V^2\,, \qquad v \in V\,.$$

Sei $V_h \subset V$ und seien $u \in V$ und $u_h \in V_h$ Lösungen der Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \langle \ell, v\rangle\,, \qquad v \in V\,,\\ a(u_h,v_h) &= \langle \ell, v_h\rangle\,, \qquad v_h \in V_h\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

a) Stabilität: $\|u\|_V \leq \|\ell\|_{V'}/c_a$ und $\|u_h\|_V \leq \|\ell\|_{V'}/c_a$.

b) Galerkin-Orthogonalität: $a(u-u_h, v_h) = 0$ für alle $v_h \in V_h$.

c) A-priori-Fehlerabschätzung: $\|u-u_h\|_V \leq \dfrac{C_a}{c_a} \inf\limits_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_V$.

(4.2) Sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ mit $\Gamma = \bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Gamma} \bar{F}$. Dann gilt: es existieren Konstanten C_Γ und C_{F} mit

a) $\|v\|_{0,\Gamma} \leq C_\Gamma \|v\|_{1,\Omega}$ für alle $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

b) $\|v\|_{0,\Omega} \leq C_{\mathrm{F}}\Big(\|v\|_{0,\Gamma} + \|\nabla v\|_{0,\Omega}\Big)$ für alle $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

$a(v,w) = (\nabla v, \nabla w)_0$ ist elliptisch in $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ mit $a(v,v) \geq (C_{\mathrm{F}}^2+1)^{-1}\|v\|_1^2$ für $v \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$.

4 Galerkin-Verfahren

(4.3) Sei V ein Hilbert-Raum, $V_h \subset V$, $h \in \mathcal{H}$, und $V_0 = \overline{\bigcup_{h\in\mathcal{H}} V_h}$ der Abschluss bezüglich $\|\cdot\|_V$.
Sei $J\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig konvex in V_0 und nach unten beschränkt, d.h., es existieren $c_J > 0$ und $C_J \in \mathbb{R}$ mit

$$J((1-\lambda)v + \lambda w)) \geq (1-\lambda)J(v) + \lambda J(w) + \frac{c_J(1-\lambda)\lambda}{2}\,\|v-w\|_V^2\,, \qquad J(v) \geq C_J$$

für alle $v, w \in V_0$ und $\lambda \in [0,1]$.
Dann besitzt $J(\cdot)$ ein eindeutiges Minimum $u \in V_0$, d.h., $J(u) \leq J(v)$ für alle $v \in V_0$.

Anwendung: Wenn $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und elliptisch ist, dann ist $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \ell, v\rangle$ gleichmäßig konvex und nach unten beschränkt.

(4.4) Sei $\bar\Omega = \bigcup \bar K$ und für $\mathcal{F}_h^\Gamma \subset \mathcal{F}_h \cap \partial\Omega$ sei $\bar\Gamma = \bigcup_{F\in\mathcal{F}_h^\Gamma} \bar F$. Dann gilt:

a) Es existiert $\tilde\Omega \supset \bar\Omega$ und $\tilde C > 0$, so dass zu jedem $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ eine Fortsetzung $\tilde u \in \mathrm{H}^1_0(\tilde\Omega)$ mit $\|\tilde u\|_{1,\tilde\Omega} \leq \tilde C\,\|u\|_{1,\Omega}$ existiert.

b) $\mathrm{C}^1(\bar\Omega)$ ist dicht in $\mathrm{H}^1(\Omega)$ und $u|_{\partial\Omega} \in \mathrm{L}_2(\partial\Omega)$ for $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

c) Seien $\mathcal{K}_h$, $h \in \mathcal{H}$, zulässige Triangulierungen mit $0 \in \bar{\mathcal{H}}$. Dann gilt

$$\mathrm{H}^1(\Omega) = \overline{\bigcup_{h\in\mathcal{H}} \mathrm{S}^1(\Omega_h)}\,, \qquad \mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) = \overline{\bigcup_{h\in\mathcal{H}} \big\{v \in \mathrm{S}^1(\Omega_h)\colon v(z) = 0 \text{ für } z \in \mathcal{V}_h \cap \Gamma\big\}}\,.$$

4 Galerkin-Verfahren

(4.5) Sei V ein Hilbert-Raum, $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und elliptische Bilinearform, und $\ell\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Linearform. Dann existiert genau eine Lösung $u \in V$ von

$$a(u, v) \quad = \quad \langle \ell, v \rangle\,, \qquad v \in V\,.$$

Anwendung: Sei $\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{D} \cup \Gamma_\mathrm{N} \cap \Gamma_\mathrm{R}$, $\kappa y \cdot y \geq \kappa_0 |y|^2$ mit $\kappa_0 > 0$ und $r - \frac{1}{2}\operatorname{div} q \geq 0$ in Ω, $\alpha + \frac{1}{2} q \cdot n \geq 0$ auf Γ_R, $\frac{1}{2} q \cdot n \geq 0$ auf Γ_N und $|\Gamma_\mathrm{D}|_{D-1} > 0$. Dann ist

$$a(v, w) = \int_\Omega \big(\kappa \nabla v \cdot \nabla w + q \cdot \nabla v w + r v w\big)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\mathrm{R}} \alpha v w \,\mathrm{d}a$$

in $H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$ elliptisch.

(4.6) Sei $\omega \subset \Omega$ eine offene Teilmenge. Dann existiert $C_\mathrm{P} > 0$ mit

$$\|v - v_\omega\|_{0,\omega} \leq C_\mathrm{P} \|\nabla v\|_{0,\omega}\,, \qquad v_\omega = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega v \,\mathrm{d}x\,, \qquad v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,.$$

Anwendung: $a(v, w) = (\nabla v, \nabla w)_0$ ist elliptisch in $\mathrm{H}^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit

$$a(v, v) \geq (C_\mathrm{P}^2 + 1)^{-1} \|v\|_1^2\,, \qquad v \in \mathrm{H}^1(\Omega)/\mathbb{R} \simeq \Big\{ v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\colon \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0 \Big\}\,.$$

(4.7) Sei $\hat{K} = \operatorname{conv}\{\hat{z}_0, \ldots, \hat{z}_D\}$ der Referenzsimplex und $\varphi_K\colon \hat{K} \longrightarrow \bar{K}$ linear affin mit $\varphi_K(\hat{x}) = z_{K,0} + B_K \hat{x}$ und $J_K = \det B_K > 0$. Dann gilt für $v \in \mathrm{H}^1(K)$ und $\hat{v} = v \circ \varphi_K$

$$\|\hat{v}\|_{0,\hat{K}} \leq J_K^{-1/2} \|v\|_{0,K}\,, \qquad \|\hat{\nabla} \hat{v}\|_{0,\hat{K}} \leq |B_K| J_K^{-1/2} \|\nabla v\|_{0,K}\,.$$

5 Interpolation und Approximation

(5.1) Sei $\{\mathcal{K}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ eine affin äquivalente Familie von Triangulierungen, d.h. es existiert ein Referenzsimplex $\hat{K}$ und für alle $K \in \mathcal{K}_h$, $h \in \mathcal{H}$ linear affine Abbildungen $\varphi_K : \hat{K} \longrightarrow \bar{K}$ mit $\varphi_K(\hat{x}) = z_{K,0} + B_K\hat{x}$ und $J_K = \det B_K > 0$. Sei $h_K = \operatorname{diam}(K)$ und $h = \max_{K\in\mathcal{K}_h} h_K$.

Eine affin äquivalente Familie von Triangulierungen heißt *quasi-uniform*, falls $c > 0$ existiert mit $h_K > ch$ für alle $K \in \mathcal{K}_h$ und $h \in \mathcal{H}$.

Sie heißt *regulär*, falls $C > 0$ existiert mit $|B_K^{-1}| \leq Ch_K^{-1}$ für alle K.

(5.2) Sei $\rho_K = \max\left\{\operatorname{diam} U \colon U = U_r(z) \subset K\right\}$ größter Durchmesser eines Innenkreises bzw. einer Kugel in K. Dann gilt:
Falls $c > 0$ existiert mit $\rho_K \geq ch_K$ für alle K, dann ist $\{\mathcal{K}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ regulär.

Im Folgenden sei $\{\mathcal{K}_h\}_{h\in\mathcal{H}}$ regulär und $0 \in \bar{\mathcal{H}}$.

(5.3) Inverse Ungleichung: Es existieren $C_{\text{inv}} > 0$ und $C_{\text{bnd}} > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{0,K} &\leq C_{\text{inv}} h_K^{-1}\, \|v\|_{0,K}\,, && v \in \mathrm{H}^1(K)\,, \\ \|v\|_{0,F} &\leq C_{\text{inv}} h_K^{-1/2}\, \|v\|_{0,K}\,, && F \in \mathcal{F}_K\,. \end{aligned}$$

Anwendung: Sei $a(\cdot,\cdot)$ elliptisch in $\mathrm{H}^1(\Omega)$, und sei $\underline{A} = \big(a(\lambda_z,\lambda_y)\big)_{y,t\in\mathcal{V}_h\setminus\Gamma_D}$ die Steifigkeitsmatrix. Dann gilt $\kappa_2(\underline{A}) \leq Ch^{-2}$.

5 Interpolation und Approximation

(5.4) Sei $\Pi_h^0 \colon \mathrm{L}_2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{S}^0(\Omega_h)$ die L_2-Projektion

$$\Pi_h^0 v(x) = v_K\,, \qquad x \in K\,, \qquad v_K = \frac{1}{|K|}\int_K v\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann gilt: Es existiert $C > 0$ mit

$$\|v - \Pi_h^0 v\|_{0,K} \quad \le \quad C h_K\, \|\nabla v\|_{0,K}\,, \qquad v \in \mathrm{H}^1(K)\,,$$

und für alle $v \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ gilt $\lim_{h \longrightarrow 0} \Pi_h^0 v = v$.

(5.4) Sei $\Pi_h^C \colon \mathrm{L}_2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{S}^1(\Omega_h)$ die Clément-Interpolation

$$\Pi_h^C v = \sum_z v_{\omega_z}\lambda_z\,, \qquad \omega_z = \operatorname{supp}\lambda_z\,, \qquad v_{\omega_z} = \frac{1}{|\omega_z|}\int_{\omega_z} v\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann gilt: Es existieren $C_1, C_2, C_3 > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\|v - \Pi_h^C v\|_{0,K} &\le C_1 h_K\, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}\,, && v \in \mathrm{H}^1(\omega_K)\,,\\
\|v - \Pi_h^C v\|_{0,F} &\le C_2 h_F^{1/2}\, \|\nabla v\|_{0,\omega_K}\,, && v \in \mathrm{H}^1(\omega_K)\,,\ F \in \mathcal{F}_K\\
\|\Pi_h^C v\|_{1,\Omega} &\le C_3\, \|v\|_{1,\Omega}\,, && v \in \mathrm{H}^1(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

Anwendung: Π_h^C konvergiert gegen die Einbettung $E \colon \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathrm{L}_2(\Omega)$, d.h. E ist durch Operatoren mit endlich-dimensionalen Bild beliebig gut approximierbar. Daher besitzt jede beschränkte Teilfolge in $\mathrm{H}^1(\Omega)$ eine Teilfolge, die in $\mathrm{L}_2(\Omega)$ konvergiert, d.h., die Einbettung E ist kompakt (Satz von Rellich).

5 Interpolation und Approximation

Sei $a(\cdot,\cdot)$ stetige und elliptische Bilinearform in V, und sei $\ell \in V'$. Sei $u \in V$ Lösung von $a(u,v) = \langle \ell, v\rangle$ für $v \in V$ und $u_h \in V_h = \mathrm{S}_h^1(\Omega) \cap V$ die Galerkin-Approximation.

(5.6) A posteriori Abschätzung
Betrachte $V = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = (\nabla u, \nabla u)_0$, $\langle \ell, v\rangle = (f,v)_0$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_1 \le C\Big(\sum_{K\in\mathcal{K}_h} h_K^2 \|\Delta u_h + f\|_{0,K}^2 + \sum_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Omega} h_F \|[\nabla u_h \cdot n]\|_{0,F}^2\Big)^{1/2}.$$

Dabei ist $[\nabla u \cdot n] = \nabla u_K \cdot n_K + \nabla u_{K_F} \cdot n_{K_F}$ auf $\bar F = \partial K \cap \partial K_F$.

(5.7) $\mathrm{H}^2(\Omega) = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \colon \partial_j v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ für $j = 1,\cdots,d\}$ und $\|v\|_2 = \sqrt{\|v\|_1^2 + \|\mathrm{D}^2 v\|_0^2}$.

(5.8) Es existiert $\hat C > 0$ mit $\|\hat v - \Pi_{\hat K}^1 \hat v\|_{2,\hat K} \le \hat C \|\hat{\mathrm{D}}^2 \hat v\|_{0,\hat K}$ für $\hat v \in \mathrm{H}^2(\hat K)$.

(5.9) Es existiert $C > 0$ mit $\|v - \Pi_h^1 v\|_{m,\Omega} \le C h^{2-m} \|\mathrm{D}^2 v\|_{0,K}$ für $v \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, $m = 0,1$.

(5.10) A priori Abschätzung
Die Lösung $u \in V$ sei zusätzlich in $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Dann gilt $\|u - u_h\|_1 \le Ch\|\mathrm{D}^2 v\|_{0,K}$.
Falls $C_2 > 0$ existiert, sodass für jedes $g \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ die Lösung $w_g \in V$ mit $a(v, w_g) = (g, v)_0$ für $v \in V$ zusätzlich in $\mathrm{H}^2(\Omega)$ ist und $\|w_g\|_2 \le C_2 \|g\|_0$ erfüllt, gilt $\|u - u_h\|_0 \le Ch^2 \|\mathrm{D}^2 u\|_{0,\Omega}$.

6 Lagrange-Elemente

(6.1) Sei $V_K \subset \mathrm{C}(\bar{K})$. Dann heißt eine Menge $\mathcal{Z}_K \subset \bar{K}$ von endlich vielen Punkten *unisolvent*, wenn für alle $g \in \mathrm{C}(\bar{K})$ die Interpolationsaufgabe $v(z) = g(z)$, $z \in \mathcal{Z}_K$ eine eindeutige Lösung $v \in V_K$ besitzt.

(6.2) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\bar{K} = \mathrm{conv}\{z_0, \dots, z_d\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{Z}_K = \Big\{ \sum_{j=0}^{d} t_j z_j \colon \sum_{j=0}^{d} t_j = 1,\ t_j \in \frac{1}{k}\mathbb{N}_0 \Big\} \text{ ist unisolvent in } \mathbb{P}_k(K).$$

(6.3) Sei $\hat{K} = [0,1]^d$. Dann gilt: $\mathcal{Z}_K = \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d \cap \hat{K}$ ist unisolvent in $\mathbb{P}_k \otimes \mathbb{P}_k$ bzw. in $\mathbb{P}_k \otimes \mathbb{P}_k \otimes \mathbb{P}_k$.

(6.4) Ein Element (K, V_K, Λ_K) heißt *Lagrange-Element*, falls $V_K \subset \mathrm{C}(\bar{K})$ und die Freiheitsgrade Λ_K Punktauswertungen and $\mathcal{Z}_K$ sind. Dann existiert eine Knotenbases $\{\lambda_{K,z}\}_{z \in \mathcal{Z}_K}$ von V_K mit $\lambda_{K,z}(z) = 1$, $\lambda_{K,z}(y) = 0$ für $y \in \mathcal{Z}_K \setminus \{z\}$ mit der Interpolation $I_K v(x) = \sum_{z \in \mathcal{Z}_K} v(z)\lambda_{K,z}$.

(6.5) Eine Familie (K, V_K, Λ_K) von Elementen heißt *affin*, wenn ein Referenzelement $(\hat{K}, \hat{V}, \hat{\Lambda})$ existiert, so dass für alle K ein orientierungerhaltender Diffeomorphismus $\varphi_K \colon \hat{K} \longrightarrow \bar{K}$ existiert mit $V_K = \big\{\hat{v} \circ \varphi_K^{-1} \colon \hat{v} \in \hat{V}\big\}$ und $\Lambda_K = \big\{\lambda' \in V_K' \colon \langle \lambda', v \rangle = \langle \hat{\lambda}', v \circ \varphi_K \rangle\,,\ \hat{\lambda}' \in \hat{\Lambda}\big\}$.

(6.6) Die Interpolation I_K sei exakt für $\mathbb{P}_k(K)$.
Dann gilt für affine Triangulierungen $\|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{k+1,\hat{K}} \le \hat{C}|\hat{v}|_{k+1,\hat{K}}$ und

$$\|v - I_K v\|_m \le C_m h^{k+1-m} |v|_{k+1}\,, \qquad v \in \mathrm{H}^{k+1}(\Omega)\,,\ m = 0, \dots, k\,.$$

6 Lagrange-Elemente

(6.7) Sei $a(\cdot,\cdot)$ stetige und elliptische Bilinearform in $V \subset \mathrm{H}^1(\omega)$, und sei $\ell \in V'$.
Sei $u \in V$ Lösung von $a(u,v) = \langle \ell, v\rangle$ für $v \in V$ und $u_h \in V_h \subset V$ die Galerkin-Approximation.
Wenn $V_h|_K \subset \mathbb{P}_k(K)$ für alle K und wenn die Lösung $u \in V$ zusätzlich in $\mathrm{H}^{k+1}(\Omega)$ liegt, gilt

$$\|u - u_h\|_1 \le Ch^k |u|_{k+1} \,.$$

Falls $C_2 > 0$ existiert, sodass für jedes $g \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ die Lösung $w_g \in V$ mit $a(v, w_g) = (g, v)_0$ für $v \in V$ zusätzlich in $\mathrm{H}^2(\Omega)$ ist und $\|w_g\|_2 \le C_2\|g\|_0$ erfüllt, gilt $\|u - u_h\|_0 \le Ch^{k+1}|u|_{k+1}$.

(6.8) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt Lipschitz-Gebiet, wenn zu jedem $z \in \partial\Omega$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ und eine Lipschitz-stetige injektive Abbildung $\psi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ existiert mit $z \in \psi(U)$ und $\Omega \cap \psi(U) = \psi(U_+)$, $U_+ = \{x \in U\colon x_1 > 0\}$.

(6.9) Ein Element (K, V_K, Λ_K) einer affinen Familie heißt *isoparametrisch*, falls $\varphi_K \in V_K^d$.
Für isoparametrische Lagrange-Elemente gilt $\varphi_K(\hat{x}) = \sum_{z\in\mathcal{Z}_K} \lambda_{\hat{K},\hat{z}}(\hat{x})z$.

(6.10) 1. Lemma von Strang
Sei $V_h \subset V \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$, $|a(v,w)| \le C_a\|v\|_1\|w\|_1$ für $v, w \in V$ und $a_h(\cdot,\cdot)$ und ℓ_h seien Approximationen von $a(\cdot,\cdot)$ und ℓ mit $a_h(v_h, v_h) \ge c_a\|v_h\|_1^2$ für $v_h \in V_h$.
Es sei $u_h \in V_h$ Lösung von $a_h(u_h, \phi_h) = \langle \ell_h, \phi_h\rangle$ für $\phi_h \in V_h$. Dann existiert $C > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_1 \quad \le \quad C\Big(\inf_{\phi_h \in V_h} \Big(\|u - \phi_h\|_1 + \sup_{\|w_h\|_1 = 1} |a(w_h, \phi_h) - a_h(w_h, \phi_h)| \Big) + \sup_{\|\psi_h\|_1 = 1} |\langle \ell - \ell_h, \psi_h\rangle| \Big) \,.$$

7 Petrov-Galerkin-Methoden

(7.1) Seien U, V Hilberträume und $b\colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit:

a) Es existiert $C > 0$ mit $|b(u,v)| \le C\,\|u\|_U\|v\|_V$ für alle $u \in U$, $v \in V$.

b) Es existiert $\beta > 0$ mit $\displaystyle\sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{b(u,v)}{\|v\|_V} \ge \beta\,\|u\|_U$ für alle $u \in U$.

c) Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein $u \in U$ mit $b(u,v) \ne 0$.

Dann existiert zu $\ell \in V'$ eine eindeutige Lösung $u \in U$ der Variationsgleichung

$$b(u,v) = \langle \ell, v\rangle\,, \qquad v \in V$$

und es gilt die a-priori Abschätzung $\|u\|_U \le \frac{1}{\beta}\|\ell\|_{V'}$.

(7.2) Der Operator $B \in \mathcal{L}(U,V')$ mit $\langle Bu, v\rangle = b(u,v)$ sei injektiv, und es existiere $\beta > 0$ mit

$$\sup_{u\in U\setminus\{0\}} \frac{b(u,v)}{\|u\|_U} \ge \beta\,\|v\|_V\,, \qquad v \in V\,.$$

Dann ist auch die inf-sup Bedingung b) erfüllt.

(7.3) Sei $U_h \times V_h \subset U \times V$, und es existiere $\beta_0 > 0$ mit

$$\sup_{v_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{b(u_h,v_h)}{\|v_h\|_V} \ge \beta_0\,\|u_h\|_U\,, \qquad u_h \in U_h\,.$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in U_h$ der diskreten Variationsgleichung

$$b(u_h,v_h) = \langle \ell, v_h\rangle\,, \qquad v_h \in V_h$$

und es gilt die a-priori Fehlerabschätzung $\displaystyle\|u-u_h\|_U \le \frac{C}{\beta_0} \inf_{\phi_h\in U_h} \|u-\phi_h\|_U\,.$

8 Gemischte Finite-Elemente-Methoden

Karlsruhe Institute of Technology

(8.1) Seien V, W Hilberträume, $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $a(\phi,\phi) \geq 0$ und $b\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $\ell_V \in V'$, $\ell_W \in W'$. Dann ist äquivalent:

a) (v,w) löst das lineare Sattelpunktproblem

$$\begin{aligned} a(v,\phi) + b(\phi,w) &= \langle \ell_V, \phi\rangle\,, && \phi \in V\,,\\ b(v,\psi) &= \langle \ell_W, \psi\rangle\,, && \psi \in W\,. \end{aligned}$$

b) (v,w) ist Sattelpunkt des Lagrangefunktionals

$$L(\phi,\psi) = \frac{1}{2}a(\psi,\psi) - \langle \ell_V,\psi\rangle + b(\psi,\psi) - \langle \ell_W,\psi\rangle\,,$$

d.h. $L(v,\psi) \leq L(v,w) \leq L(\phi,w)$ für alle $\phi \in V$ und $\psi \in W$.

(8.2) Sei $V_0 = \{\phi \in V\colon b(\phi,\psi) = 0,\ \psi \in W\}$, $W_0 = \{\psi \in W\colon b(\phi,\psi) = 0,\ \phi \in V\} = \{0\}$,

$$a(\phi,\phi) \geq \alpha\|\phi\|_V^2\,,\quad \phi \in V_0\,,\qquad \sup_{\phi\in V\setminus\{0\}} \frac{b(\phi,\psi)}{\|\phi\|_V} \geq \beta\,\|\psi\|_W\,,\qquad \psi \in W\,.$$

Dann existiert genau eine Lösung $(v,w) \in V \times W$ von (8.1).

(8.3) Sei $V_h \times W_h \subset V \times W$, $V_{0,h} = \{\phi_h \in V_h\colon b(\phi_h,\psi_h) = 0 \text{ für alle } \psi_h \in W_h\}$, $W_{0,h} = \{\psi_h \in W_h\colon b(\phi_h,\psi_h) = 0 \text{ für alle } \phi_h \in V_h\} = \{0\}$, und es existiere $\alpha_0, \beta_0 > 0$ mit

$$a(\phi_h,\phi_h) \geq \alpha_0\|\phi_h\|_V^2\,,\quad \phi \in V_{0,h}\,,\qquad \sup_{\phi_h\in V_h\setminus\{0\}} \frac{b(\phi_h,\psi_h)}{\|\phi_h\|_V} \geq \beta_0\,\|\psi_h\|_W\,,\quad \psi_h \in W_h\,.$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung $(v_h,w_h) \in V_h \times W_h$ des diskreten Sattelpunktproblems

$$a(v_h,\phi_h) + b(\phi_h,w_h) + b(v_h,\psi_h) = \langle \ell_V,\phi_h\rangle + \langle \ell_W,\psi_h\rangle\,,\qquad (\phi_h,\psi_h) \in V_h \times W_h$$

und es gilt $\|(v,w) - (v_h,w_h)\|_{V\times W} \leq C \inf_{(\phi_h,\psi_h)\in V_h\times W_h} \|(v,w) - (\phi_h,\psi_h)\|_{V\times W}\,.$

9 Discontinuous-Galerkin-Methoden

Sei $r \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $q \in \mathrm{L}_\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{div} q \in \mathrm{L}_\infty(\Omega)$, $\Gamma_{\text{in}} = \{x \in \partial\Omega\colon\, q(x)\cdot n(x) < 0\}$.
Setze $Lu = ru + q\cdot\nabla u$ und $U_0 = \{v \in \mathrm{H}(L,\Omega)\colon\, v = 0 \text{ auf } \Gamma_{\text{in}}\}$ mit $\|v\|_U^2 = \|v\|_0^2 + \|Lv\|_0^2$.

(9.1) Sei $r - \frac{1}{2}\operatorname{div} q \geq r_0 > 0$. Dann existiert $C_L > 0$ mit $\|v\|_0 \leq C_L\|Lv\|_0$ für $v \in U_0$.

(9.2) Sei $b(v,w) = (Lv,w)_0$. Dann existiert $\beta > 0$ mit $\sup_{\phi\in\mathrm{L}_2(\Omega)} \frac{b(v,\phi)}{\|\phi\|_0} \geq \beta\,\|v\|_U$ für $v \in U_0$.

Sei $V_h = \mathbb{P}_k(\Omega_h) \subset \mathrm{L}_2(\Omega)$, $[v_h]_{K,F} = v_{K_F} - v_K$ auf $\overline{F} = \partial K \cap \partial K_F$,

$$b_h(v_h,w_h) = \sum_K \Big(\int_K (rv_K + q\cdot\nabla v_K)\, w_K \,\mathrm{d}x + \int_{\partial K_{\text{in}}\setminus\Gamma_{\text{in}}} [v_h]_{K,F}\, w_K\, q\cdot n_K \,\mathrm{d}a\Big) - \int_{\Gamma_{\text{in}}} v_h w_h q\cdot n \,\mathrm{d}a\,.$$

(9.3) $b_h(v_h,v_h) \geq r_0\|v_h\|_0^2 + \|v_h\|_{q,\partial\Omega_h}^2$ mit $\|v_h\|_{q,\partial\Omega_h}^2 = \sum\limits_{F\in\mathcal{F}_h\cap\Omega}\ \int\limits_{\partial K\setminus\Gamma_{\text{in}}} [v_h]_{K,F}^2 |q\cdot n_F| \,\mathrm{d}a + \int\limits_{\Gamma_{\text{in}}} v_h^2 |q\cdot n| \,\mathrm{d}a$.

(9.4) $\sup\limits_{\phi_h\in V_h} \frac{b_h(v_h,\phi_h)}{\|\phi_h\|_{1,q,\Omega_h}} \geq \beta_0\|v_h\|_{1,q,\Omega_h}$ für $\|v\|_{1,q,\Omega_h}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{q,\partial\Omega_h}^2 + \sum\limits_K h_K\|q\cdot\nabla v\|_{0,K}^2$.

(9.5) Es gilt $|b_h(v,\phi_h)| \leq C\|v\|_{3/2,q,\partial\Omega_h}\|v_h\|_{1,q,\Omega_h}$ für
$\|v\|_{3/2,q,\partial\Omega_h}^2 = \|v\|_{1,q,\Omega_h}^2 + \sum_K \big(h_K^{-1}\|v\|_{0,K}^2 + \|v\|_{0,\partial K}^2\big)$ und $v \in U + V_h$, $\phi_h \in V_h$.

(9.6) Sei $Lu = f$ in Ω, $u = u_{\text{in}}$ auf Γ_{in}, und $b_h(u_h,\phi_h) = (f,\phi_h)_0 - \int_{\Gamma_{\text{in}}} u_{\text{in}}\phi_h q\cdot n \,\mathrm{d}a$ für $\phi_h \in V_h$.
Dann gilt $b_h(u-u_h,\phi_h) = 0$ für $\phi_h \in V_h$.

(9.7) Es gilt $\|u-u_h\|_{1,q,\Omega_h} \leq C\ \inf_{\phi_h\in V_h}\|u-\phi_h\|_{3/2,q,\partial\Omega_h}$.
Falls $u \in \mathrm{H}^{m+1}(\Omega)$ für $0 \leq m \leq k$, dann gilt $\|u-u_h\|_{1,q,\Omega_h} \leq Ch^{m+1/2}\|u\|_{m+1,\Omega}$.

9 Discontinuous-Galerkin-Methoden

Sei $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ Lösung von $-\Delta u = f$ in Ω, $u = u_\mathrm{D}$ auf Γ_D und $\nabla u \cdot n = g_\mathrm{N}$ auf Γ_N.
Sei $V_h = \big\{ v_h \in \mathrm{L}_2(\Omega) \colon v_K = v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K)$ für alle K$\big\}$. Definiere

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_K \int_K \nabla u_K \cdot \nabla v_K \,\mathrm{d}x - \sum_{F \in \mathcal{F}_h \setminus \Gamma_\mathrm{N}} \int_F \Big(\{\!\{ \nabla u_h \}\!\}_F \cdot [\![v_h]\!]_F + [\![u_h]\!]_F \cdot \{\!\{ v_h \}\!\}_F \Big) \,\mathrm{d}a$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h \setminus \Gamma_\mathrm{N}} \frac{\gamma}{h_F} \int_F [\![u_h]\!]_F \cdot [\![v_h]\!]_F \,\mathrm{d}a$$

mit $\{\!\{ \sigma_h \}\!\}_F = \frac{1}{2}\big(\sigma_K + \sigma_{K_F}\big)$ und $[\![v_h]\!]_F = v_K n_K + v_{K_F} n_{K_F}$ auf $F = \partial K \cap \partial K_F$ und $\{\!\{ \sigma_h \}\!\}_F = \sigma_K$ und $[\![v_h]\!]_F = v_K n_K$ auf $F = \partial K \cap \partial \Omega$.

(9.8) Sei $C_\mathrm{tr} > 0$ mit $\|\nabla v_K \cdot n_K\|^2_{0,\partial K} \le C_\mathrm{tr} h_K^{-1} \|\nabla v_K\|^2_{0,K}$ und $\gamma > C_\mathrm{tr}$. Dann existiert $C_\gamma > 0$ mit $a_h(v_h, v_h) \ge C_\gamma \|v_h\|^2_{1,1/2,\Omega_h}$ für $\|v_h\|^2_{1,1/2,\Omega_h} = \|\nabla v_h\|^2_{0,\Omega_h} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h \setminus \Gamma_\mathrm{N}} h_F^{-1} \|[\![u_h]\!]_F\|^2_{0,F}$.

Sei $u_h \in V_h$ mit $a_h(u_h, v_h) = \displaystyle\int_\Omega f v_h \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_\mathrm{N}} g_\mathrm{N} v_h \mathrm{d}a + \sum_{F \in \mathcal{F}_h \cap \Gamma_\mathrm{D}} \int_F \big(\frac{\gamma}{h_F} u_\mathrm{D} v_h - \nabla u_h \cdot n v_h \big) \mathrm{d}a$.

(9.9) Es gilt $a_h(u - u_h, v_h) = 0$ für alle $v_h \in V_h$.

(9.10) Es gilt $a_h(v, \phi_h) \le C \, \|v\|_{1,3/2,\Omega_h} \|\phi_h\|_{1,1/2,\Omega_h}$ für $v \in V + V_h$ und $\phi_h \in V_h$
mit $\|v\|^2_{1,3/2,\Omega_h} = \|v\|^2_{1,1/2,\Omega_h} + \sum_F h_F \|\{\!\{ \nabla v_h \}\!\}_F \cdot n_F\|^2_{0,F}$.

(9.11) Es gilt $\|u - u_h\|_{1,1/2,\Omega_h} \le C \ \inf_{\phi_h} \|u - \phi_h\|_{1,3/2,\Omega_h}$.
Falls $u \in \mathrm{H}^{m+1}(\Omega)$ für $0 \le m \le k$, dann gilt $\|u - u_h\|_{1,1/2,\Omega_h} \le C h^m \|u\|_{m+1,\Omega}$.
Falls die Randwertaufgabe H^2-regulär ist, gilt $\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le C h^{m+1} \|u\|_{m+1,\Omega}$.