Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 1

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (Satz von Gauß für Dreiecke in 2D)

Sei $\hat{K} := \mathrm{conv}\{(0,0)^\top, (1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ und sei $K := \mathrm{conv}\{z_0, z_1, z_2\} \subset \mathbb{R}^2$ ein nicht-entartetes Dreieck. Für $B_K := (z_1 - z_0 \mid z_2 - z_0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $\varphi : \hat{K} \longrightarrow K$, $\varphi(\hat{x}) := z_0 + B_K\hat{x}$ die affin-lineare Transformation von $\hat{K}$ auf K, wobei $J := \det B_K > 0$ gelte. Es seien $\hat{e}_0 := (1,0)^\top - (0,0)^\top$, $\hat{e}_1 := (0,1)^\top - (1,0)^\top$, $\hat{e}_2 := (0,0)^\top - (0,1)^\top$ die Tangentialvektoren auf den Seiten von $\hat{K}$ und $e_k := B_K\hat{e}_k$, $k = 0,1,2$, die zugehörigen Tangentialvektoren auf den Seiten von K. Ferner seien $\hat{n}_k$, n_k die äußeren Einheitsnormalen der k-ten Seite von $\hat{K}$ bzw. K, $k = 0,1,2$.

Im Folgenden fassen wir φ als Koordinatentransformation $x = \varphi(\hat{x})$ auf, d. h. zu gegebener Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sei $\hat{f}(\hat{x}) := f\big(\varphi(\hat{x})\big) = f(x)$. Wir unterscheiden Differentialoperatoren bezüglich $\hat{x}$ und x, z. B. sind $\mathrm{div}_{\hat{x}}\,\hat{f}(\hat{x}) = \partial_{\hat{x}_1}\hat{f}_1(\hat{x}) + \partial_{\hat{x}_2}\hat{f}_2(\hat{x})$ und $\mathrm{div}_x\, f(x) = \partial_{x_1} f_1(x) + \partial_{x_2} f_2(x) = (\partial_{x_1} f_1)\big(\varphi(\hat{x})\big) + (\partial_{x_2} f_2)\big(\varphi(\hat{x})\big)$.

a) Sei $\hat{\sigma} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen den Satz von Gauß für $\hat{K}$, d. h.:

$$\int_{\partial\hat{K}} \hat{\sigma}\cdot n_{\hat{K}}\,\mathrm{d}\hat{a} = \int_{\hat{K}} \mathrm{div}_{\hat{x}}\,\hat{\sigma}\,\mathrm{d}\hat{x}.$$

Hinweis: Parametrisieren Sie die Seiten von $\hat{K}$ einzeln.

b) Zeigen Sie, dass die k-te äußere Einheitsnormale von K durch $n_k = |B_K^{-\top}\hat{n}_k|^{-1}B_K^{-\top}\hat{n}_k$ für $k = 0,1,2$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie die Gleichungen $J = |K||\hat{K}|^{-1} = |B_K\hat{e}_k|\big(|B_K^{-\top}\hat{n}_k||\hat{e}_k|\big)^{-1}$ für $k = 0,1,2$. *Hinweis: Verwenden Sie den Transformationssatz für Integrale und elementargeometrische Überlegungen zu den Flächeninhalten $|K|$ und $|\hat{K}|$ der Dreiecke K und $\hat{K}$.*

d) Sei $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie:

$$\int_{\partial K} \sigma\cdot n_K\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\hat{K}} \big(JB_K^{-1}(\sigma\circ\varphi)(\hat{x})\big)\cdot n_{\hat{K}}(\hat{x})\,\mathrm{d}\hat{a}.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $\gamma := \varphi\circ\hat{\gamma}$ eine Parametrisierung einer Seite von K ist, sofern $\hat{\gamma}$ eine Seite von $\hat{K}$ parametrisiert, und dass die Ableitung einer affin-linearen Parametrisierung konstant ist. Nutzen Sie außerdem die Aufgabenteile b) und c).

e) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld und $\hat{\sigma}(\hat{x}) := f\big(\varphi(\hat{x})\big)$, $\hat{x} \in \hat{K}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{div}_{\hat{x}}\,\hat{\sigma}(\hat{x}) = \mathrm{div}_x\big(B_K f(x)\big) \quad \text{für alle } x = \varphi(\hat{x}),\ \hat{x}\in\hat{K}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel. Ferner gilt $\mathrm{div}_x\, f(x) = \mathrm{tr}\,\big(D_x f(x)\big)$.

f) Leiten Sie den Satz von Gauß für K mithilfe der vorherigen Aufgabenteile her, d.h.:

$$\int_{\partial K} \sigma\cdot n_K\,\mathrm{d}a = \int_K \mathrm{div}_x\,\sigma\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Wählen Sie f in e) geschickt, um d) und a) anzuwenden.

Aufgabe 2 (Differentialoperatoren und partielles Integrieren)

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei offen. Zeigen Sie folgende Gleichungen in Ω:

a) $\nabla(uv) = (\nabla u)v + u\nabla v$ für alle $u, v \in C^1(\Omega)$.

b) $\mathrm{div}(u\nabla v) = \nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v$ für alle $u \in C^1(\Omega)$, $v \in C^2(\Omega)$.

Für die Teilaufgaben c), d) und e) sei stets $d = 3$.

c) $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\, u) = 0$ für alle $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

d) $\nabla\times(\nabla\times u) = \nabla(\nabla\cdot u) - \Delta u$ für alle $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, wobei der Laplace-Operator für ein Vektorfeld u komponentenweise durch $\Delta u := (\Delta u_k)_{k=1,\dots,d}$ gegeben sei.

e) $\mathrm{div}(u\times v) = (\nabla\times u)\cdot v - u\cdot(\nabla\times v)$ für alle $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offen, beschränkt und stückweise C^1-berandet.

f) Für $u \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ und $v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\nabla v\cdot n_\Omega\,\mathrm{d}a.$$

g) Sei $k \in \{1,\dots,d\}$ und $u, v \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega (\partial_k u)v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(\partial_k v)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv(n_\Omega)_k\,\mathrm{d}a.$$

h) Es gilt für $d = 3$ und $u, v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^d)\cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$

$$\int_\Omega (\mathrm{curl}\, u)\cdot v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\mathrm{curl}\, v)\cdot u\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} (u\times v)\cdot n_\Omega\,\mathrm{d}a.$$

Besprechung am **Dienstag, den 22. Oktober 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.