Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 2

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 3 (Der Satz von Stokes für Dreiecke in 3D)
Es seien $\hat{z}_0 := (0,0,0)^\top$, $\hat{z}_1 := (1,0,0)^\top$, $\hat{z}_2 := (0,1,0)^\top$ und es sei $\hat{K} := \operatorname{conv}\{\hat{z}_0, \hat{z}_1, \hat{z}_2\}$ das Referenzdreieck mit den Tangentialvektoren $\hat{e}_0 := \hat{z}_1 - \hat{z}_0$, $\hat{e}_1 := \hat{z}_2 - \hat{z}_1$ und $\hat{e}_2 := \hat{z}_0 - \hat{z}_2$. Ferner seien $n_{\hat{K}} := \hat{e}_0 \times (-\hat{e}_2) = (0,0,1)^\top$ die Einheitsnormale, welche die Oberseite von $\hat{K}$ definiert, und $\tau_{\hat{K}}$ der positiv orientierte, normierte Tangentialvektor auf $\partial\hat{K}$.

Betrachten Sie das nicht-entartete Dreieck $K := \operatorname{conv}\{z_0, z_1, z_2\} \subset \mathbb{R}^3$ mit den Tangentialvektoren $e_0 := z_1 - z_0$, $e_1 := z_2 - z_1$ und $e_2 := z_0 - z_2$ und der Einheitsnormale $n_K := |e_0 \times e_2|^{-1} e_0 \times (-e_2)$, sowie dem positiv orientierten, normierten Tangentialvektor τ_K auf ∂K.

Durch $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\hat{x} \mapsto z_0 + B_K \hat{x}$ mit $B_K := \big(e_0 \mid -e_2 \mid n_K\big) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei eine affin-lineare Transformation gegeben. Wie auf dem ersten Übungsblatt fassen wir $x = \varphi(\hat{x})$ als Koordinatentransformation auf und unterscheiden Differentialoperatoren bezüglich $\hat{x}$ bzw. x.

a) Sei $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein differenzierbares Vektorfeld. Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{curl}_{\hat{x}} \hat{f}(\hat{x}) := (\nabla_{\hat{x}} \times \hat{f})(\hat{x}) := \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}_2} \hat{f}_3(\hat{x}) - \partial_{\hat{x}_3} \hat{f}_2(\hat{x}) \\ \partial_{\hat{x}_3} \hat{f}_1(\hat{x}) - \partial_{\hat{x}_1} \hat{f}_3(\hat{x}) \\ \partial_{\hat{x}_1} \hat{f}_2(\hat{x}) - \partial_{\hat{x}_2} \hat{f}_1(\hat{x}) \end{pmatrix}, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^3,$$

die *Rotation*[1] von $\hat{f}$ bezüglich $\hat{x}$. Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen den Satz von Stokes für $\hat{K}$, d. h.:

$$\int_{\hat{K}} \operatorname{curl}_{\hat{x}} \hat{f} \cdot n_{\hat{K}} \, \mathrm{d}\hat{a} = \int_{\partial\hat{K}} \hat{f} \cdot \tau_{\hat{K}} \, \mathrm{d}\hat{s}$$

b) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\varphi(\hat{K}) = K$ (ii) $\det B_K = |K||\hat{K}|^{-1}$ (iii) $n_K = B_K^{-\top} n_{\hat{K}}$

Hinweis: Es gilt $\det(a \mid b \mid c) = (a \times b) \cdot c$ *für* $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ *(Spatprodukt).*

c) Es sei $G := (e_0 \mid -e_2) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und sei $S \subset \mathbb{R}^3$ das von e_0 und $-e_2$ aufgespannte Parallelogramm. Zeigen Sie mit elementargeometrischen Überlegungen für die Gram-sche Determinante $g := \det(G^\top G)$ die Gleichung $\sqrt{g} = |S| = 2|K| = \det B_K$.

[1] In der Literatur ist auch die Bezeichnung *rot* statt *curl* üblich.

d) Zeigen Sie den Satz von Stokes für K, d. h. für $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gilt:

$$\int_K \operatorname{curl}_x f \cdot n_K \, \mathrm{d}a = \int_{\partial K} f \cdot \tau_K \, \mathrm{d}s$$

Hinweis: Nutzen Sie die vorherigen Aufgabenteile und die folgende Koordinatentransformation für die Rotation: $\operatorname{curl}_{\hat{x}} \Big(B_K^\top f(\varphi(\hat{x}))\Big) = (\det B_K) B_K^{-1} \Big(\operatorname{curl}_x f(x)\Big)$, $x = \varphi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (Singuläre Lösung der Laplace-Gleichung)
Sei $S = \big\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)^\top| < 1,\ x < 0 \text{ oder } y > 0\big\}$ der Einheitskreis mit einspringender Ecke. Setze $G := (0,1) \times (0, 3\pi/2)$ und betrachte die Abbildung

$$\varphi : G \longrightarrow S, \qquad \varphi(r,\phi) = (r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))^\top,$$

die S bijektiv über Polarkoordinaten parametrisiert. Definiere außerdem die Funktionen $\tilde{u}, \tilde{v} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{u}(r,\phi) := r^{\frac{2}{3}} \cdot \sin\left(\tfrac{2\phi}{3}\right), \qquad \tilde{v}(r,\phi) := r^{\frac{-2}{3}} \cdot \sin\left(\tfrac{-2\phi}{3}\right),$$

und für $\tilde{f} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f := \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$.

a) Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten bezüglich $(x,y)^\top = \varphi(r,\phi)$ lautet $\Delta f(x,y) = \frac{1}{r}\partial_r\big(r\partial_r \tilde{f}(r,\phi)\big) + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}\tilde{f}(r,\phi)$. Zeigen Sie: $\Delta u = \Delta v = 0$ in S.

b) Setze $A(r,\phi) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & r^{-1}\sin(-\phi) \\ \sin(\phi) & r^{-1}\cos(\phi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $(r,\phi) \in G$. Zeigen Sie für $f \in \{u, v\}$:

$$\nabla_{xy} f\big(\varphi(r,\phi)\big) = A(r,\phi)\nabla_{r\phi}\tilde{f}(r,\phi) \quad \text{für alle } (r,\phi) \in G.$$

Dabei seien $\nabla_{xy} f := (\partial_x f, \partial_y f)^\top$ und $\nabla_{r\phi}\tilde{f} := (\partial_r \tilde{f}, \partial_\phi \tilde{f})^\top$.

c) Für welche $p \in [1,\infty)$ liegen $|\nabla_{xy} u|$, $|\nabla_{xy} v|$ und $|\nabla_{xy}(u+v)|$ in $L^p(S)$?

Hinweis: Führen Sie die Untersuchung von $u+v$ *auf Ihre Ergebnisse zu* u *und* v *zurück.*

d) Betrachten Sie folgendes RWP: Zu $g \in C\big(\partial S \setminus \{0\}\big)$ finde $w \in C^2(S) \cap C\big(\overline{S} \setminus \{0\}\big)$ mit

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{in } S, \\ w = g, & \text{auf } \partial S \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Was können Sie über die Eindeutigkeit der Lösung dieses Randwertproblems aussagen, falls der Gradient $|\nabla_{xy} w|$ der Lösung w in $L^1(S)$ liegen soll?

Besprechung am **Dienstag, den 29. Oktober 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.