Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 3

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 5 (Ein Laplace-Problem mit unstetigen Randdaten)

Es sei $B := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)^\top| < 1\}$ der Einheitskreis und $u_\mathrm{D} \colon \partial B \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u_\mathrm{D}(x,y) = 1$, $x \geq 0$, $u_\mathrm{D}(x,y) = 0$, $x < 0$ für $(x,y)^\top \in \partial B$ eine Funktion.

Betrachten Sie das folgende Randwertproblem in B: finde $u \in C^2(B) \cap L^\infty(B)$ mit

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = 0\,, & \text{in } B, \\ u = u_\mathrm{D}\,, & \text{auf } \partial B. \end{cases}$$

Der Poisson-Kern für die Einheitskreisscheibe B ist gegeben durch

$$P(r,\phi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \exp(in\phi)\,, \qquad (r,\phi) \in G := (0,1) \times (-\pi,\pi).$$

Es lässt sich zeigen, dass die Funktion $u : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u\big(\varphi(r,\phi)\big) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\phi - t) u_\mathrm{D}\big(\varphi(1,t)\big)\,\mathrm{d}t$$

eine Lösung des Randwertproblems $(*)$ ist, wobei $\varphi(r,\phi) := \big(r\cos(\phi), r\sin(\phi)\big)^\top$ für $(r,\phi) \in G$, die Polarkoordinatentransformation sei.

a) Zeigen Sie, dass sich u über die Reihe

$$u\big(\varphi(r,\phi)\big) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} r^{2n+1} \cos\big((2n+1)\phi\big), \qquad (r,\phi) \in G,$$

darstellen lässt. (Bem: Es gilt $u\big(\varphi(r,\phi)\big) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Re}\big[\arctan\big(r\exp(i\phi)\big)\big]$.)

b) Bestimmen mithilfe dieser Entwicklung den Gradienten $\nabla_{r\phi} u$ bezüglich r, ϕ und berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis die Norm des Gradienten $|\nabla_{xy} u|$ bezüglich $(x,y) := \varphi(r,\phi)$ wie in Aufgabe 4.

c) Untersuchen Sie, ob das Integral

$$\int_B |\nabla_{xy} u|^2 \,\mathrm{d}(x,y)$$

existiert. Gilt $u \in H^1(B)$?

Aufgabe 6 (Spurabschätzung mit den Raviart-Thomas-Formfunktionen)

Es sei $K := \mathrm{conv}\{z_0, z_1, z_2\} \subset \mathbb{R}^2$ ein nicht-entartetes Dreieck und $\varphi(\hat{x}) := z_0 + B_K \hat{x}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$, mit $B_K := (z_1 - z_0 \mid z_2 - z_0)$ die Transformation vom Referenzdreieck $\hat{K}$ auf K.

Eine Variante der Raviart-Thomas-Formfunktionen für K ist definiert durch

$$\psi_k(x) := \frac{|z_m - z_n|}{\det B_K}(x - z_k), \quad m,n \in \{0,1,2\} \setminus \{k\},\ m \neq n, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$k = 0,1,2$.

Es sei $h := \max\{|z_1 - z_0|, |z_2 - z_1|, |z_0 - z_2|\}$ die maximale Seitenlänge von K und es sei $c > 0$ so gewählt, dass $ch^2 \leq \det B_K$ gilt.

a) Zeigen Sie die Gleichung $\psi_k \cdot n_K = 1$ auf der Seite von K, die z_k gegenüberliegt, und dass $\psi_k \cdot n_K = 0$ auf den beiden anderen Seiten von K gilt, $k = 0,1,2$.

b) Betrachten Sie z_0 und die z_0 gegenüberliegende Seite $F \subset \partial K$. Zeigen Sie

$$\|u\|_{0,F}^2 \leq \|\operatorname{div}\psi_0\|_{\infty,K} \|u\|_{0,K}^2 + 2\|\psi_0\|_{\infty,K} \|u\|_{0,K} \|\nabla u\|_{0,K}. \qquad (+)$$

Hinweis: Nutzen Sie $\|u\|_{0,F} = \|u\psi_0 \cdot n_K\|_{0,F}$ und verwenden Sie den Divergenzsatz von Gauß sowie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

c) Zeigen Sie für $k = 0,1,2$

$$\|\psi_k\|_{\infty,K} \leq \frac{h^2}{\det B_K}, \qquad \text{und} \qquad \|\operatorname{div}\psi_k\|_{\infty,K} \leq \frac{2h}{\det B_K}.$$

d) Ziel dieser Aufgabe ist ein Beweis der Abschätzung

$$\|u\|_{0,F} \leq \sqrt{\frac{5}{2c}} \Big(h^{-1/2}\|u\|_{0,K} + h^{1/2}\|\nabla u\|_{0,K}\Big).$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(i) Wenden Sie den Spezialfall $2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$, $a,b \geq 0$, $\epsilon > 0$ der Youngschen Ungleichung auf den zweiten Summanden von (+) an.

(ii) Wählen Sie $\epsilon := (2h)^{-1}$, verwenden Sie Aufgabenteil c) und ziehen Sie die Wurzel.

Besprechung am **Dienstag, den 5. November 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.