Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 4

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 7 (Invarianz elementarer FEM-Räume unter affin-linearen Transformationen)
Es seien $d \in \{2,3\}$, $\hat{K} := \{\hat{z}_0, \dots, \hat{z}_d\}$ das Referenz-Simplex und $\overline{K} := \{z_0, \dots, z_d\}$ der Abschluss eines nicht-entarteten, offenen Simplex in $\mathbb{R}^d$.

Ferner sei $\varphi_K(\hat{x}) := z_0 + B_K\hat{x}$, $B_K := (z_1 - z_0 \mid \cdots \mid z_d - z_0)$, $\det B_K > 0$, die affin-lineare Transformation von $\hat{K}$ auf K.

Wir betrachten die folgenden Finite-Element-Räume auf K (und auf $\hat{K}$ entsprechend)

$$\begin{aligned} S^0(K) &:= \{u_K \in \mathbb{P}_0(K) : u_K(x) = a_0,\ a_0 \in \mathbb{R}\}, \\ S^1(K) &:= \{u_K \in \mathbb{P}_1(K) : u_K(x) = a_0 + a \cdot x,\ (a_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}, \\ S(\mathrm{div}, K) &:= \{v_K \in \mathbb{P}_1(K, \mathbb{R}^d) : v_K(x) = a + b_0 x,\ (a, b_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Rechnen Sie nach:

a) Es gilt $u_K := u_{\hat{K}} \circ \varphi_K^{-1} \in S_h^k(K)$ für alle $u_{\hat{K}} \in S^k(\hat{K})$, $k = 0, 1$.

b) Es gilt $v_K := B_K v_{\hat{K}} \circ \varphi_K^{-1} \in S(\mathrm{div}, K)$ für alle $v_{\hat{K}} \in S(\mathrm{div}, \hat{K})$.

Aufgabe 8 (Freiheitsgrade und Transformationen)
Es sei die Situation wie in Aufgabe 7. Für $z \in \mathcal{V}_K$ und $F \in \mathcal{F}_K$ sind die Freiheitsgrade η'_K, λ'_z und ψ'_F gegeben durch

$$\langle \eta'_K, u \rangle := \int_K u \,\mathrm{d}x, \quad u \in S^0(K), \qquad \langle \lambda'_z, u \rangle := u(z), \quad u \in S^1(K),$$
$$\langle \psi'_F, v \rangle := \int_F v \cdot n_F \,\mathrm{d}a, \quad v \in S(\mathrm{div}, K).$$

Bestimmen Sie die Konstanten $c_0, c_1, c_{\mathrm{div}} \in \mathbb{R}$, sodass

a) $\langle \eta'_K, u_K \rangle = \left\langle \eta'_{\hat{K}}, u_{\hat{K}} \right\rangle$ für $u_K := c_0 u_{\hat{K}} \circ \varphi_K^{-1}$, $u_{\hat{K}} \in S^0(\hat{K})$,

b) $\langle \lambda'_z, u_K \rangle = \left\langle \lambda'_{\hat{z}}, u_{\hat{K}} \right\rangle$ für $u_K := c_1 u_{\hat{K}} \circ \varphi_K^{-1}$, $u_{\hat{K}} \in S^1(\hat{K})$ und

c) $\langle \psi'_F, u_K \rangle = \left\langle \psi'_{\hat{F}}, u_{\hat{K}} \right\rangle$ für $u_K := c_{\mathrm{div}} B_K u_{\hat{K}} \circ \varphi_K^{-1}$, $u_{\hat{K}} \in S(\mathrm{div}, \hat{K})$.

Dabei seien $\hat{z} := \varphi_K^{-1}(z)$ und $\hat{F} := \varphi_K^{-1}(F)$.

Aufgabe 9 (Zusammenhang zwischen $S^1(\Omega)$ und $S(\mathrm{curl}, \Omega)$)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Polygongebiet und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω in nicht-entartete Tetraeder. In der Vorlesung wurden die folgenden Räume definiert:

$$\begin{aligned} S_h(\mathrm{curl}, \Omega) &:= \{v \in H(\mathrm{curl}, \Omega) : v|_K \in S(\mathrm{curl}, K),\ K \in \mathcal{T}_h\}, \\ S(\mathrm{curl}, K) &:= \{v : K \longrightarrow \mathbb{R}^3 : v(x) = a + b \times x,\ x \in K,\ a, b \in \mathbb{R}^3\}, \quad K \in \mathcal{T}_h \end{aligned}$$

Sei nun $v \in S_h(\mathrm{curl}, \Omega)$ curl-frei, d. h. $\mathrm{curl}\, v = 0$ in Ω. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion eines Potentials $u \in S_h^1(\Omega)$ von v mit $\nabla u = v$.

a) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $v_K = v|_K$ konstant ist für alle $K \in \mathcal{T}_h$.

b) Sei $(z_0, \dots, z_n) \in \mathcal{V}_h^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein geschlossener Kantenzug in $\mathcal{T}_h$, d. h., $z_0 = z_n$ und für $k = 1, ..., n$ ist (z_{k-1}, z_k) eine Kante $e_k \in \mathcal{E}_h$ mit $\bar{e}_k = \mathrm{conv}\{z_{k-1}, z_k\}$. Zeigen Sie, dass für das Kurvenintegral über den geschlossenen Kantenzug

$$\sum_{k=1}^n \int_{e_k} v \cdot \mathrm{d}s = \sum_{k=1}^n v \cdot (z_k - z_{k-1}) = 0\,.$$

gilt.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Stokes und die Eigenschaft $\mathrm{curl}\, v = 0$.

c) Wähle einen festen Knoten $z_0 \in \mathcal{V}_h$ und definiere $u \in S_h^1(\Omega)$ mit $u(z_0) = 0$ und

$$u(z) = \sum_{k=1}^n v \cdot (z_k - z_{k-1})\,, \qquad z \in \mathcal{V}_h$$

wobei $(z_0, \dots, z_n) \in \mathcal{V}_h^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein beliebiger Kantenzug in $\mathcal{T}_h$ mit $z_n = z$ ist. Zeigen Sie, dass u wohldefiniert ist, d.h., dass $u(z)$ unabhängig vom gewählten Kantenzug eindeutig bestimmt ist.

d) Sei $K \in \mathcal{T}_h$ und $e \in \mathcal{E}_K$ mit $\bar{e} = \mathrm{conv}\{z_j, z_k\}$. Zeigen Sie

$$v \cdot (z_j - z_k) = u(z_j) - u(z_k) = \nabla u_K \cdot (z_j - z_k)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung von $s \mapsto u(z_k + s(z_j - z_k))$, $s \in (0, 1)$.

e) Zeigen Sie $v_K = \nabla u_K$.
Hinweis: Verwenden Sie a) und d).

Besprechung am **Dienstag, den 12. November 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.