Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 5

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 10 (Variationsformulierung in Operatorschreibweise)

Es sei V ein Hilbertraum und $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Ferner seien $C, c > 0$ so gewählt, dass für alle $v, w \in V$ gilt:

$$(i) \quad |a(v,w)| \leq C\|v\|_V \|w\|_V, \qquad\qquad (ii) \quad a(v,v) \geq c\|v\|_V^2.$$

a) Für $v \in V$ definiere $A_v\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\langle A_v, w\rangle := a(v,w)$, $w \in V$. Zeigen Sie, dass $A_v \in V'$ gilt und dass die Abbildung $A\colon V \longrightarrow V'$, $v \mapsto A_v$ linear und stetig ist mit $\|A\|_{\mathcal{L}(V,V')} \leq C$.

b) Es sei $\ell \in V'$. Zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung, dass es genau ein $v_\ell \in V$ gibt mit $Av_\ell = \ell$ in V'.

c) Nach b) ist $A\colon V \longrightarrow V'$ eine Bijektion. Zeigen Sie: $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leq c^{-1}$.

d) Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussage aus c) zur $\inf$-$\sup$-Bedingung, d. h.

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(V',V)} \leq c^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{v\in V\setminus\{0\}} \sup_{w\in V\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V\|w\|_V} \geq c.$$

Aufgabe 11 (Ein Punkt ist nicht genug)

Es sei $\Omega = (-1,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{K}_0$ eine Triangulierung von Ω in 12 kongruente Tetraeder, wobei jeder Tetraeder den Punkt $z_0 := (0,0,0)$ als Ecke besitze. Die Familie $(\mathcal{K})_{h\in\mathcal{H}}$ entstehe durch sukzessive, reguläre Zerlegung jedes Tetraeders in 8 Teiltetraeder, sodass $\mathcal{H} = \{\sqrt{2}\,2^{-l}\colon l \in \mathbb{N}_0\}$ gilt.

Definiere $V_h := \{u_h \in S_h^1(\Omega)\colon u_h(z_0) = 0\}$, $h \in \mathcal{H}$, und es sei $a\colon H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Bilinearform zum Laplace-Operator, d. h. $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega}$, $u,v \in H^1(\Omega)$.

a) Definiere $\theta_h \in V_h$ mit $\theta_h(z) = 1$, $z \in \mathcal{V}_h \setminus \{z_0\}$, und $\theta_h(z_0) = 0$, für $h \in \mathcal{H}$. Es sei $\hat{h} \in \mathcal{H}$ fest und $u_{\hat{h}} \in S_{\hat{h}}^1(\Omega)$. Definiere $\tilde{u}_h := u_{\hat{h}}\theta_h$ für $h \in \mathcal{H}$, $h < \hat{h}$. Dann ist $\tilde{u}_h \in V_h$, $h \in \mathcal{H}$, $h < \hat{h}$. Zeigen Sie, dass $\|u_{\hat{h}} - u_h\|_{1,\Omega} \to 0$, $h \to 0$.

Hinweis: Zeigen Sie dazu $\|1-\theta_h\|_{1,\Omega} \to 0$, $h \to 0$, und nutzen Sie die Beschränktheit $\sup_{x\in\Omega}|u_{\hat{h}}(x)|, \sup_{x\in\Omega}|\nabla u_{\hat{h}}(x)| < \infty$ für $u_{\hat{h}} \in V_{\hat{h}}$.

b) Folgern Sie, dass die Vereinigung $\bigcup_{h\in\mathcal{H}} V_h$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt.

c) Nehmen Sie an, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $a(v_h, v_h) \geq c\|v_h\|_{1,\Omega}^2$ für alle $v_h \in V_h$, $h \in \mathcal{H}$, gilt.

Was bedeutet diese Annahme für die Eindeutigkeit der Lösung des folgenden Variationsproblems:

Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$a(u,v) = (l,v)_{0,\Omega}, \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega),$$

wobei $l \in L^2(\Omega)$ fest ist?

d) Rechnen Sie nach, dass es eine Konstante wie in c) nicht geben kann, indem Sie zeigen, dass eine von h unabhängige Konstante $\hat{c} > 0$ existiert mit $\hat{c}h^{-1}a(\theta_h,\theta_h) \leq \|\theta_h\|_{1,\Omega}^2$.

Aufgabe 12 (... in 1D aber schon)

Es sei $\Omega := (-1,1) \subset \mathbb{R}$ und $(\mathcal{K})_{h\in\mathcal{H}}$ sei eine Familie uniformer Triangulierungen mit $h \to 0$, sodass $0 \in \mathcal{V}_\mathcal{K}$ für alle $K \in \mathcal{K}$ gilt. Wieder seien $V_h := \{u_h \in S_h^1(\Omega)\colon u_h(0) = 0\}$ und $a\colon H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a(u,v) := \int_{-1}^1 u'(s)v'(s)\,\mathrm{d}s$ für $u,v \in H^1(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass $c\|u_h\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_h,u_h)$ für alle $u_h \in V_h$ gilt, $h \in \mathcal{H}$, wobei c nicht von h abhängt.

Hinweis: Schätzen Sie für $u_h \in V_h$ den Wert $|u_h(x)|$ mit dem Hauptsatz gegen $\|\nabla u_h\|_{0,\Omega}$ ab , $x \in \Omega$.

b) Es sei $V := \overline{\bigcup_{h\in\mathcal{H}} V_h}$. Was können Sie über die Eindeutigkeit der Lösung von folgender Variationsaufgabe aussagen?

Sei $l \in L^2(\Omega)$ fest. Finde $u \in V$ mit

$$a(u,v) = (l,v)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } v \in V.$$

c) Gilt $V = H^1(\Omega)$?

Bem: Im Eindimensionalen gilt $H^1(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

Besprechung am **Dienstag, den 26. November 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.