Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 6

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 13 (Ein Neumannproblem mit Strafterm)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, ein beschränktes Polygongebiet, $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\partial\Omega)$. Betrachten Sie das folgende Variationsproblem:

Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $a(u,v) = \langle \ell, v\rangle$ für alle $v \in H^1(\Omega)$, wobei

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \qquad \langle \ell, v\rangle := \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}a, \qquad u,v \in H^1(\Omega). \quad (1)$$

a) Zeigen Sie, dass die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (2)$$

notwendigerweise erfüllt ist, wenn eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (1) existiert.

b) Betrachten Sie die Bilinearform $\tilde{a}\colon H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{a}(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \left(\int_\Omega u \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega v \,\mathrm{d}x\right), \qquad u,v \in H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{a}$ elliptisch auf $H^1(\Omega)$ ist. Führen Sie dazu einen Widerspruchsbeweis wie folgt:

(i) Nehmen Sie an, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in H^1(\Omega)$ existiert, sodass $\|u_n\|_{1,\Omega}^2 > n\,\tilde{a}(u_n,u_n)$ gilt, und betrachten Sie $v_n := u_n \|u_n\|_{1,\Omega}^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass v_n in der $H^1(\Omega)$-Norm beschränkt ist.

(ii) Nehmen Sie an, dass $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert. (*Satz von Rellich-Kondrachov*: Jede beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ besitzt eine $L^2(\Omega)$-konvergente Teilfolge, vgl. [L.C. Evans. *PDEs*, §5.7].)

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $v \in L^2(\Omega)$ dieser $L^2(\Omega)$-konvergenten Teilfolge von $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ liegt und dass $\nabla v = 0$ in Ω gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass $v = 0$ in $L^2(\Omega)$ gilt, und folgern Sie einen Widerspruch.

c) Es sei $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von $\tilde{a}(\tilde{u},v) = \ell(v)$ für alle $v \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$|\Omega| \int_\Omega \tilde{u} \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \,\mathrm{d}x.$$

(ii) Falls zusätzlich (2) erfüllt ist, so löst $\tilde{u}$ auch (1).

Bem: Das Variationsproblem in c) ist äquivalent zur Minimierung des Funktionals $J\colon H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \longmapsto \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + \frac{1}{2}\big(p(u)\big)^2$, mit $p(u) = \int_\Omega u \,\mathrm{d}x$.

Dabei wird $\frac{1}{2}\big(p(u)\big)^2$ *Strafterm* genannt.

Aufgabe 14 (Ein Beweis des Lemmas von Lax-Milgram)

Es sei V ein Hilbert-Raum, $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und elliptische Bilinearform, d. h. es existieren $C, c > 0$, sodass für alle $v, w \in V$ die Ungleichungen

$$(i) \quad |a(v,w)| \le C\|v\|_V\|w\|_V, \qquad\qquad (ii) \quad a(v,v) \ge c\|v\|_V^2,$$

gelten, und $\ell \in V'$ sei ein lineares, stetiges Funktional auf V.

Wie in Aufgabe 10 definieren wir $A\colon V \longrightarrow V'$ durch $\langle Av, w\rangle := a(v,w)$, $v,w \in V$.

Ferner betrachten wir die Riesz-Abbildung $R\colon V \longrightarrow V'$, $v \longmapsto (v,\cdot)_V$, $v \in V$.

a) Zeigen Sie, dass R isometrisch ist, d. h. $\|Rv\|_{V'} = \|v\|_V$ für alle $v \in V$.

b) Es sei $u \in V$, $\rho > 0$. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$a(u,v) = \langle \ell, v\rangle \quad \forall v \in V \qquad \Longleftrightarrow \qquad u - \rho(R^{-1}Au - R^{-1}\ell) = u \quad \text{in } V.$$

c) Für $\rho > 0$ betrachten Sie den Operator $T_\rho\colon V \longrightarrow V$, $u \longmapsto u - \rho(R^{-1}Au - R^{-1}\ell)$. Bestimmen Sie ρ in Abhängigkeit von C, c so, dass T_ρ kontrahierend ist, d. h. es existiert $\theta \in (0,1)$ mit $\|T_\rho v - T_\rho w\|_V \le \theta\|v - w\|_V$ für alle $v, w \in V$.

Hinweis: Multiplizieren Sie $\|T_\rho v - T_\rho w\|_V^2$ aus ($u := v - w$ ist praktisch); verwenden Sie a).

d) Folgern Sie, dass es genau ein $u_\ell \in V$ gibt, sodass $a(u_\ell, v) = \langle \ell, v\rangle$ für alle $v \in V$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz für T_ρ sowie Aufgabenteil b).

Besprechung am **Dienstag, den 3. Dezember 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.