Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Wintersemester 2019/20

Übungsblatt 7

Aufgabe 15 (Lagrange-Interpolation höherer Ordnung)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, ein Polygongebiet und $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ eine reguläre, affin-äquivalente Familie von Triangulierungen von Ω, d. h. es existiert ein Referenzsimplex $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ und für $K \in \mathcal{K}_h$ existiert ein affin-lineares $\varphi_K : \hat{K} \longrightarrow K$, $\hat{x} \longmapsto z_{K,0} + B_K\hat{x}$, $z_{K,0} \in \mathcal{V}_K$ mit $\det B_K > 0$.

Ferner sei $k \in \mathbb{N}$ und $V_h := \operatorname{span}\{\phi_{h,z} : z \in \mathcal{V}_h\}$ ein Lagrange-FEM-Raum mit zugehöriger Lagrange-Interpolation

$$\Pi_h^k : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h, \quad v \longmapsto \textstyle\sum_{z\in\mathcal{V}_h} v(z)\phi_{h,z},$$

wobei $\mathcal{V}_h \subset \overline{\Omega}$ die Knotenpunkte und $\{\phi_{h,z}\}_{z\in\mathcal{V}_h}$ eine nodale Basis seien, d. h. für $y, z \in \mathcal{V}_h$ gilt $\phi_{h,z}(y) = \delta_{zy}$, $\mathcal{V}_h|_K = \mathbb{P}_{k+1}(\mathbb{R}^d)$ und $\phi_{h,z}(y) = 0$ für $y \notin K$. Wir nehmen an, dass ein $\bar{C} > 0$ existiert mit $\|\phi_{h,z}\|_{\infty,\Omega} < \bar{C}$ für alle $z \in \mathcal{V}_h$, $h \in \mathcal{H}$.

Das Ziel dieser Aufgabe ist ein Beweis der folgenden Abschätzung für den Interpolationsfehler in der $L^2(\Omega)$-Norm mit einer von $h \in \mathcal{H}$ unabhängigen Konstante $C > 0$:

$$\|v - \Pi_h^k v\|_{0,\Omega} \le C h^{k+1} \|\mathrm{D}^{k+1} v\|_{0,\Omega}, \qquad v \in H^{k+1}(\Omega) \tag{1}$$

Für $l \in \mathbb{N}$, $l \le k+1$, sei dabei $\|\mathrm{D}^l v\|_{0,\Omega} := \big\| |\mathrm{D}^l v| \big\|_{0,\Omega}$ und für $z \in \Omega$ sei

$$\big|(\mathrm{D}^l v)(z)\big| := \sup_{\substack{x_1,\dots,x_l \in \mathbb{R}^d \\ |x_1| = \dots = |x_l| = 1}} \big|(\mathrm{D}^l v)(z)[x_1, \dots, x_l]\big| .$$

Betrachte außerdem die gemittelten Taylor-Polynome auf $K \in \mathcal{K}_h$. Für $v \in H^{k+1}(K)$ definieren wir

$$(Q^k v)(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \int_K (\mathrm{D}^l v)(y) [\overbrace{x-y, \dots, x-y}^{l \text{ Einträge}}] \,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie für das Restglied $R^k v = v - Q^k v$, dass es die folgende Darstellung hat:

$$(R^k v)(x) = \frac{1}{k!|K|} \int_{K\times(0,1)} t^k \big(\mathrm{D}^{k+1} v\big)\big((1-t)x + ty\big) [\overbrace{x-y, \dots, x-y}^{k+1 \text{ Einträge}}] \,\mathrm{d}(y,t).$$

Hinweis: Betrachten Sie für $v \in C^{k+1}(K)$ und feste Punkte $x, y \in K$ die Funktion $\rho_{x,y}(t) := v\big(tx + (1-t)y\big)$, $t \in [0,1]$. Das k-te Taylor-Polynom von $\rho_{x,y}$ um $t_0 = 0$ und das Restglied in Integraldarstellung sind an der Stelle $t = 1$ gegeben durch

$$(\tilde{T}^k \rho_{x,y})(1) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \rho_{x,y}^{(l)}(0), \quad (\tilde{R}^k \rho_{x,y})(1) = \frac{1}{k!} \int_0^1 t^k \rho_{x,y}^{(k+1)}(1-t) \,\mathrm{d}t,$$

sodass $v(x) = \rho_{x,y}(1) = (\tilde{T}^k \rho_{x,y})(1) + (\tilde{R}^k \rho_{x,y})(1)$ gilt. Dann gilt

$$(Q^k v)(x) := \frac{1}{|K|} \int_K (\tilde{T}^k \rho_{x,y})(1) \,\mathrm{d}y\,, \qquad (R^k v)(x) := \frac{1}{|K|} \int_K (\tilde{R}^k \rho_{x,y})(1) \,\mathrm{d}y\,.$$

b) Zeigen Sie, dass sich das Restglied folgendermaßen darstellen lässt

$$(R^k v)(x) = \int_K \chi(x,z) \big(\mathrm{D}^{k+1} v\big)(z) [\overbrace{x-z, \dots, x-z}^{k+1 \text{ Einträge}}] \,\mathrm{d}z,$$

mit $\chi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $|\chi(x,y)| \le \frac{h_K^d}{k!d|K|} |z-x|^{-d}$ gilt. *Hinweis: Finden Sie eine geeignete Parametrisierung für y und t.*

c) Zeigen Sie die Abschätzung $\|R^k v\|_{\infty,K} \le \tilde{C} \|\mathrm{D}^{k+1} v\|_{0,K}$, wobei $\tilde{C} > 0$ nicht von v abhängt. *Hinweis: Nutzen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und b)*

d) Begründen Sie nun die markierten Stellen in folgender Rechnung

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h^k v\|_{0,K} &\overset{(1)}{\le} \|v - Q^k v\|_{0,K} + \|\Pi_h^k (Q^k - v)\|_{0,K} \\ &\overset{(2)}{\le} \|R^k v\|_{0,K} + C \|R^k v\|_{\infty,K} \overset{(3)}{\le} \hat{C} \|\mathrm{D}^{k+1} v\|_{0,K}, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten $C, \hat{C} > 0$ nicht von v abhängen. *Hinweis: $(Q^k v)(x)$ ist in x ein Polynom vom Grad k.*

e) Folgern Sie $\|v - \Pi_h^k v\|_{0,K} \le C_3 h_K^{k+1} \|\mathrm{D}^{k+1} v\|_{0,K}$, wobei $C_3 > 0$ nicht von K und v abhängt. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Transformieren Sie das Integral auf der linken Seite auf das Referenzelement, wenden Sie das Resultat aus d) für $\hat{K}$ an und Transformieren Sie zurück und verwenden Sie die Transformationsformel

$$\|\mathrm{D}^l \hat{v}\|_{0,K} \le |B_K|^l |\det B_K|^{-\frac{1}{2}} \|\mathrm{D}^l v\|_{0,K}, \qquad v \in C^l(\Omega),\ l \in \mathbb{N}.$$

f) Zeigen Sie die Gültigkeit von (1).

Besprechung am **Dienstag, den 10. Dezember 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.