Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 8

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 16 (Polynomräume in höheren Dimensionen)
Es seien $k, d \in \mathbb{N}$ fest.

a) Der Raum der Tensorproduktelemente ist gegeben durch

$$\mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) := \bigotimes_{i=1}^d \mathbb{P}_k(\mathbb{R}) := \left\{ x \mapsto \prod_{i=1}^d P_i(x_i) \colon P_i \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}),\, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Zeigen Sie $\dim \mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) = (k+1)^d$.

b) Der Raum der Polynomfunktionen bis zum Grad k in $\mathbb{R}^d$ ist

$$\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) := \operatorname{span}\left\{ x \mapsto x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \colon \alpha_l \geq 0,\, \sum_{l=1}^d \alpha_l \leq k \right\}.$$

Zeigen Sie $\dim \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = \binom{k+d}{k}$.

Hinweis: Zählen Sie die Monome $\{x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \colon \alpha_j \geq 0,\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = l\}$ *vom Grad* $l \leq k$ *und führen Sie die Berechnung von* $\dim \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$ *auf* $\dim \mathbb{P}_l(\mathbb{R}^{d-1})$, $l \leq k$, *zurück.*

Aufgabe 17 (Entartete Vierecke)
Es sei $\hat{K} := [0,1]^2$ das Referenzviereck und für $t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ betrachten wir das Viereck $K_t := \operatorname{conv}\{z_{00}^t, z_{10}^t, z_{11}^t, z_{01}^t\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $z_{00}^t := 0$, $z_{10}^t := e_1, z_{11}^t := (t,t)^\top$, $z_{01} := e_2$.

Ferner definieren wir $\varphi_t \colon \hat{K} \longrightarrow K_t$, $\hat{x} \longmapsto \sum_{k,l=0}^1 L_k(\hat{x}_1) L_l(\hat{x}_2) z_{kl}^t$, $t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Dabei bezeichnet $L_k \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ das k-te Langrange-Polynom mit $L_k(\hat{x}_l) = \delta_{kl}$, $k, l \in \{0, 1\}$, sodass $\varphi_t \in \left(\mathbb{Q}_1(\mathbb{R}^2)\right)^2$ gilt.

a) Es sei $F_t(\hat{x}) := \mathrm{D}_{\hat{x}} \varphi_t(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Jacobi-Matrix von φ_t an der Stelle $\hat{x} \in \hat{K}$. Bestimmen Sie $F_t \colon \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Zeigen Sie, dass $F_t(\hat{x}) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ für alle $\hat{x} \in \hat{K}$, $t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ gilt.

c) Für $A \colon \hat{K} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, definieren wir $\|A\|_\infty := \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} |A(\hat{x})|$, wobei $|A(\hat{x})|$, die Spektralnorm von $A(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei, $\hat{x} \in \hat{K}$. Zeigen Sie, dass $\|F_t^{-1}\|_\infty \to \infty$, für $t \to \frac{1}{2}$, indem Sie

   (i) $\hat{x} = (1,1)^\top \in \hat{K}$ wählen und

   (ii) $|M^{-1}| = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|M^{-1}x|}{|x|} = \sup_{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{|y|}{|My|}$ für $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ausnutzen.

d) Gilt die Aussage von Satz (5.2) auch für Viereck-Elemente?

Aufgabe 18 (Eine nicht unisolvente Punktmenge)
Es sei $\hat{K} = \operatorname{conv}\left\{(0,0)^\top, (1,0)^\top, (0,1)^\top\right\} \subset \mathbb{R}^2$ das Referenzdreieck und ferner sei $\mathcal{Z}_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1, x_2 \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\},\, x_1 \neq x_2\right\}$ eine Menge von 6 Knotenpunkten.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}_1$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$ nicht unisolvent ist.

Besprechung am **Dienstag, den 17. Dezember 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.