Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 9

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 19 ($S(\mathrm{div}, K)$ und $S(\mathrm{curl}, K)$ auf $K = (0,1)^d$)

Es seien $d \in \{2,3\}$ und $K := (0,1)^d$. Die Freiheitsgrade für $H(\mathrm{div}, K)$ und $H(\mathrm{curl}, K)$ sind gegeben durch

$$\langle \psi'_f, v\rangle = \int_f v \cdot n_f \,\mathrm{d}a, \quad f \in \mathcal{F}_K, \qquad \langle \phi'_e, v\rangle = \int_e v \cdot \tau_e \,\mathrm{d}s, \quad e \in \mathcal{E}_K.$$

a) Konstruieren Sie eine zu $\{\psi'_f : f \in \mathcal{F}_K\}$ duale Basis von $S(\mathrm{div}, K)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} S(\mathrm{div}, K) &:= (\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_0) \times (\mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1), && d = 2,\\ S(\mathrm{div}, K) &:= (\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_0) \times (\mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_0) \times (\mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1), && d = 3. \end{aligned}$$

b) Konstruieren Sie eine zu $\{\phi'_e : e \in \mathcal{E}_K\}$ duale Basis von

$$S(\mathrm{curl}, K) := (\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_0) \times (\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1) \times (\mathbb{P}_0 \otimes \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_1).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Lagrange-Basisfunktionen $L_k \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, $L_k(l) = \delta_{kl}$, $l, k \in \{0,1\}$.

Aufgabe 20 (Gauß-Quadratur auf Dreiecken)

Es sei $\hat{K} := \mathrm{conv}\{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ das Referenzdreieck in 2D.

In dieser Aufgabe soll eine Gauß-Quadratur für $\hat{K}$ mit vier Quadraturpunkten hergeleitet werden. Dazu transformieren wir das Integral über $\hat{K}$ auf ein Integral über $(0,1)^2$ durch

$$\int_{\hat{K}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 g\big(x_1, y(1-x_1)\big)\,\mathrm{d}y \right) (1-x_1)\,\mathrm{d}x_1, \qquad g \in C(0,1).$$

a) Bestimmen Sie zur Gewichtsfunktion $\omega(t) := 1-t$, $t \in (0,1)$, die Gauß-Quadratur $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{w} \in \mathbb{R}^2$ in 1D mit zwei Stützstellen, sodass

$$\int_0^1 P(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{w}_1 P(\tilde{\xi}_1) + \tilde{w}_2 P(\tilde{\xi}_2), \qquad \text{für alle } P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}).$$

b) Es sei $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ die Gauß-Quadratur in 1D mit zwei Stützstellen, sodass

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \bar{w}_1 P(\bar{\xi}_1) + \bar{w}_2 P(\bar{\xi}_2), \qquad \text{für alle } P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}).$$

Ersetzen Sie die iterierten Integrale aus b) durch die jeweilige Gauß-Quadratur und erhalten Sie $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in (\mathbb{R}^2)^4$, $w \in \mathbb{R}^4$, sowie die Quadraturformel

$$Q_{\mathsf{Tri4}} \colon C(\hat{K}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto \textstyle\sum_{k=1}^4 w_k v(\xi_k).$$

Geben Sie ξ und w an.

c) Bestimmen Sie das größte $k \in \mathbb{N}$, sodass $Q_{\mathsf{Tri4}}(P) = \int_{\hat{K}} P\,\mathrm{d}x$ für alle $P \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^2)$. Wie ändert sich k, wenn Sie die Anzahl der Stützstellen in a) oder in b) von 2 auf 3 erhöhen?

Besprechung am **Dienstag, den 14. Januar 2020, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.