Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 10

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 21 (Eine nicht konforme Interpolation)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein beschränktes Polygongebiet und $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ eine Triangulierung von Ω. Wir definieren den Raum V_h als Raum der stückweise linearen Polynome, sodass die Sprünge auf den Faces im Mittel verschwinden

$$V_h := \left\{ v \in \prod_{K\in\mathcal{K}_h} \mathbb{P}_1(K) \colon \int_f [\![v]\!] \,\mathrm{d}a = 0,\ f \in \mathcal{F}_h \setminus \partial\Omega \right\}.$$

Dabei sei für $v \in \prod_{K\in\mathcal{K}_h} C(\overline{K})$ und $f \in \mathcal{F}_h \setminus \partial\Omega$ der Sprung auf der Face f durch $[\![v]\!] := \lim_{t\to 0, t>0} v(x + t\,n_f) - v(x - t\,n_f)$, $x \in f$, definiert.
Wir definieren für $\phi \in C(\overline{K})$, $K \in \mathcal{K}_h$, und $f \in \mathcal{F}_K$ die Funktionale

$$\Pi_K^0 \phi := \frac{1}{|K|} \int_K \phi \,\mathrm{d}x, \qquad \Pi_f^0 \phi := \frac{1}{|f|} \int_f \phi \,\mathrm{d}a,$$

sowie die induzierten Projektionen

$$\Pi_h^0 \colon \prod_{K\in\mathcal{K}_h} C(\overline{K}) \longrightarrow \prod_{K\in\mathcal{K}_h} \mathbb{P}_0(\mathbb{R}^2), \qquad \Pi_h^0\phi := \left(\Pi_K^h \phi\right)_{K\in\mathcal{K}_h},$$
$$\Pi_h^{\mathrm{nc}} \colon C(\overline{\Omega}) \longrightarrow V_h, \qquad \Pi_h^{\mathrm{nc}}\phi := \sum_{f\in\mathcal{F}_h} \Pi_f^0 \phi \lambda_f,$$

wobei $\{\lambda_f \colon f \in \mathcal{F}_h\}$ die zu $\{\Pi_f^0 \colon f \in \mathcal{F}_h\}$ duale Basis in V_h sei.

a) Bestimmen Sie $\{\lambda_{\hat{f}} \colon \hat{f} \in \mathcal{F}_{\hat{K}}\}$ für das Referenzdreieck $\hat{K} := \operatorname{conv}\{0, e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$.

b) Zeigen Sie $\Pi_h^0\left(\nabla\phi\right) = \nabla\left(\Pi_f^{\mathrm{nc}}\phi\right)$ für $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Hinweis: Betrachten Sie für $w \in \mathbb{R}^2$ beliebig $|K|\Pi_K^0\left(\nabla\phi \cdot w\right)$ und $|K|\nabla(\Pi_h^{nc}\phi)|_K \cdot w$, $K \in \mathcal{K}_h$, integrieren Sie partiell und nutzen Sie, dass $\nabla\left(\Pi_h^{nc}\lambda_f\right)$, $f \in \mathcal{F}_K$, auf K konstant ist.

Aufgabe 22 (Min-Max für Matrizen)
Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie

$$\min_{u\in\mathbb{R}^N} \max_{v\in\mathbb{R}^N} \frac{(Bu)\cdot v}{|u|\,|v|} = \min_{u\in\mathbb{R}^N} \max_{v\in\mathbb{R}^N} \frac{(B^\top u)\cdot v}{|u|\,|v|} > 0\,.$$

Was passiert, wenn B singulär ist?

Hinweis: Verwenden Sie die Singulärwertzerlegung von B bzw. die Eigenwerte von $B^\top B$.

Aufgabe 23 (Der Satz vom abgeschlossenen Bild)
Es seien U, V Hilbert-Räume und $b \colon U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Bilinearform.
Die Operatoren $B \colon U \longrightarrow V'$ und $\tilde{B} \colon V \longrightarrow U'$ seien definiert durch

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} := b(u,v) =: \left\langle \tilde{B}v, u\right\rangle_{U',U}, \qquad u \in U,\ v \in V.$$

Zu einer Teilmenge $W \subset V$ definieren wir die *Polare von W* durch

$$W^0 := \left\{\ell \in V' \colon \langle \ell, w\rangle_{V',V} = 0 \text{ für alle } w \in W\right\}.$$

a) Zeigen Sie $\overline{B(U)} = (\operatorname{Kern} B')^0$. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:
   (i) Weisen Sie nach, dass die Polare W^0 für $W \subset V$ abgeschlossen in V' ist.
   (ii) Zeigen Sie $B(U) \subset (\operatorname{Kern} B')^0$.
   (iii) Nehmen Sie die Existenz eines $\ell' \in (\operatorname{Kern} B')^0 \setminus \overline{B(U)}$ an und folgern Sie einen Widerspruch. Nehmen Sie hierfür an, dass ein $v_T \in V$ und ein $\gamma > 0$ existieren, sodass

$$\langle l, v_T\rangle_{V',V} \le \gamma \langle l_0, v_T\rangle_{V',V}, \quad \forall l \in \overline{B(U)}.$$

   Vergleiche Trennungssatz in Hilbert-Räumen nächste Woche.

b) Folgern Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:
   (i) $B(U)$ ist abgeschlossen in V'.
   (ii) Es gilt $B(U) = (\operatorname{Kern} B')^0$.

Besprechung am **Dienstag, den 21. Januar 2020, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.