Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 11

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 24 (Operatorabhängige Normen)

Es seien V, W Hilbert-Räume und $U := V \times W$, sowie $a\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $b\colon V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Bilinearformen, wobei a zusätzlich symmetrisch und elliptisch sei. Wir betrachten die Operatoren $A, A' \in \mathcal{L}(V, V')$, $B \in \mathcal{L}(V, W')$, $B' \in \mathcal{L}(W, V')$ mit

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = a(u,v) = \langle A'v, u\rangle_{V',V}\,, \quad \langle Bv, w\rangle_{W',W} = b(v,w) = \langle B'w, v\rangle_{V',V}$$

für $u, v \in V$, $w \in W$ und der Raum V sei durch $\|v\|_A := \sqrt{\langle Av, v\rangle}$, $v \in V$, normiert.

Ferner habe die Bilinearform b folgende Eigenschaften:

i) Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ existiere $w_v \in W$, sodass $b(v, w_v) \neq 0$.

ii) Es existiere $\beta > 0$ mit $\|w\|_* := \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{b(v,w)}{\|v\|_A} \geq \beta \|w\|_W$ für alle $w \in W$.

Es sei $\hat{B} \in \mathcal{L}(U, U')$ der Operator mit

$$\big\langle \hat{B}(v,w), (\phi,\psi)\big\rangle_{U',U} = a(v,\phi) + b(v,\psi) + b(\phi,w), \qquad (v,w),(\phi,\psi) \in U.$$

a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_*$ eine Norm definiert, die äquivalent zur Norm in W ist.

b) Betrachten Sie das Schur-Komplement $S := BA^{-1}B' \in \mathcal{L}(W, W')$ und zeigen Sie $\|w\|_S := \sqrt{\langle Sw, w\rangle} = \|w\|_*$ für alle $w \in W$.

Hinweis: Bestimmen Sie für festes $w \in W$ den Sattelpunkt des Lagrange-Funktionals $L_w(v,\lambda) = b(v,w) + \lambda(\|v\|_A^2 - 1)$, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Finden Sie $X \in \mathcal{L}(W, V)$, $X' \in \mathcal{L}(V', W')$, die für $L' := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V'} & 0 \\ X' & \mathrm{id}_{W'} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U', U')$, $L = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_V & X \\ 0 & \mathrm{id}_W \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(U, U)$ die Faktorisierung $\hat{B} = L'DL$ liefern.

d) Für L, L' aus c) betrachten Sie den Operator $\tilde{B} := L'\tilde{D}L$ für $\tilde{D} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in L(U, U)$.

Zeigen Sie, dass $\|u\|_{\tilde{B}} := \sqrt{\langle \tilde{B}u, u\rangle}$, $u \in U$, eine Norm auf U definiert.

e) Zeigen Sie die Identität $\hat{B}'\tilde{B}^{-1}\hat{B} = \tilde{B}$ und folgern Sie $\|\hat{B}u\|^2_{\tilde{B}^{-1}} = \|u\|^2_{\tilde{B}}$, $u \in U$.

Was bedeutet das für die Operatornorm von $\hat{B}$, wenn U mit $\|\cdot\|_{\tilde{B}}$ und U' mit $\|\cdot\|_{\tilde{B}^{-1}}$ normiert werden?

Aufgabe 25 (Der Trennungssatz in Hilbert-Räumen)

Es sei V Hilbert-Raum.

a) Sei $C \subsetneq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum von V und $u_0 \in V \setminus C$.

Zeigen Sie, dass ein $v_T \in V$ und ein $\gamma > 0$ existieren, sodass

$$(v_T, v)_V \leq \gamma < (v_T, u_0)_V \qquad \text{für alle } v \in C.$$

Hinweis: Betrachten Sie $J_{u_0}\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \longmapsto \frac{1}{2}\|v - u_0\|_V^2$ und wenden Sie Satz (4.3) aus der Vorlesung an.

b) Nun seien $C' \subsetneq V'$ ein abgeschlossener Untervektorraum des Dualraums von V und $l_0 \in V' \setminus C'$ ein Funktional.

Zeigen Sie, dass ein $v_T \in V$ und ein $\gamma > 0$ existieren, sodass

$$\langle l, v_T\rangle_{V',V} \leq \gamma < \langle l_0, v_T\rangle_{V',V} \qquad \text{für alle } l \in C'.$$

Hinweis: Betrachten Sie $C := R^{-1}C'$ und $u_0 := R^{-1}l_0$, wobei $R\colon V \longrightarrow V'$, $u \longmapsto (u,\cdot)_V$, der Riesz-Isomorphismus ist, und verwenden Sie a).

Besprechung am **Dienstag, den 28. Januar 2020, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.