Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Niklas Baumgarten

Finite Elemente Methoden

Übungsblatt 12

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 26 (Die Transportgleichung in 1D)

Für $h = N^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, $x_k := kh$, $k = 0, \dots, N$ und $I = (0,1)$ betrachten wir die Räume

$$V_h := \{v_h \in C(I) \colon v_h|_{[x_{k-1},x_k]} \in \mathbb{P}_1,\ k \in \{1,\dots,N\},\ v_h(0) = 0\},$$
$$W_h := \{w_h \in L_\infty(I) \colon w_h|_{[x_{k-1},x_k]} \in \mathbb{P}_0,\ k \in \{1,\dots,N\}\}$$

und die Bilinearformen $b_h \colon V_h \times W_h \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $b_h(v_h, w_h) := \int_0^1 v_h' w_h \,\mathrm{d}x$.

a) Zeigen Sie, dass ein von h unabhängiges $\beta_0 > 0$ existiert, sodass gilt:

$$\inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in W_h} \frac{b_h(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{W_1^1(I)} \|w_h\|_{L_\infty(I)}} \geq \beta_0 > 0$$

Hinweis: $\|v\|_{W_1^1(I)} = \|v\|_{L_1(I)} + \|v'\|_{L_1(I)}$ *für* $v \in W_1^1(I) = \{v \in L_1(I) \colon v' \in L_1(I)\}$.

b) Es sei $f \in L_1(I)$ und für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Variationsproblem

$$\text{finde } v_h \in V_h \text{ mit } b_h(v_h, w_h) = \int_0^1 f w_h \,\mathrm{d}x \text{ für alle } w_h \in W_h. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass (*) wohlgestellt ist und dass die Fehlerabschätzung

$$\|v - v_h\|_{W_1^1(I)} \leq (1 + \beta_0^{-1}) \inf_{\tilde v_h \in V_h} \|v - \tilde v_h\|_{W_1^1(I)}$$

gilt, falls $v_h \in V_h$ das Problem (*) löst und $v \in W_1^1(I)$ eine kontinuierliche Lösung ist, d. h. $v' = f$ in $L_1(I)$, $v(0) = 0$.

Aufgabe 27 (Ein nicht-standard Galerkin-Verfahren)

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $V = H(\mathrm{div}, \Omega)$, $W = H_0^1(\Omega)$, sowie $f \in L_2(\Omega)^d$, $g \in L_2(\Omega)$. Für eine Triangulierung $\mathcal{K}_h$ von Ω sei $V_h = S_h(\mathrm{div}, \Omega)$ und mit $\mathcal{F}_h^{\mathrm{i}} := \mathcal{F}_h \cap \Omega$ sei

$$W_h = \left\{ w_h \in \prod_{K \in \mathcal{K}_h} \mathbb{P}_1(K) \colon \int_f [\![w_h]\!] \,\mathrm{da} = 0,\ f \in \mathcal{F}_h^{\mathrm{i}};\ \int_{f'} w_h \,\mathrm{da} = 0,\ f' \in \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^{\mathrm{i}} \right\}$$

gegeben (vgl. Afg. 21). Für $U_h := V_h \times W_h$ definiere $a_h \colon U_h \times L_h \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a_h\big((v_h, w_h), (\phi_h, \psi_h)\big) := (v_h, \phi_h)_{0,\Omega} + (\mathrm{div}\, v_h, \psi_h)_{0,\Omega} + \sum_{K \in \mathcal{K}_h} (\nabla w_h, \phi_h)_{0,K},$$

wobei $L_h = \{(\phi_h, \psi_h) \in L_2(\Omega)^{d+1} \colon (\phi_h|_K, \psi_h|_K) \in \mathbb{P}_0(K)^{d+1},\ K \in \mathcal{K}_h\}$ sei.

Betrachte das diskrete Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{finde } (v_h, w_h) \in V_h \times W_h \text{ mit} \\ a_h\big((v_h, w_h), (\phi_h, \psi_h)\big) = (f, \phi_h)_{0,\Omega} + (g, \psi_h)_{0,\Omega} \quad \forall (\phi_h, \psi_h) \in L_h. \end{cases} \qquad (*)$$

Ferner sei $U(h) := (V \times W) + U_h$ für $|w|_{h,1,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|\nabla w\|_{0,K}^2$ normiert durch

$$\|(v, w)\|_{U(h)}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathrm{div}\, v\|_{0,\Omega}^2 + \|w\|_{0,\Omega}^2 + |w|_{h,1,\Omega}^2.$$

a) Zeigen Sie $\|\Pi_K^0 v_h\|_{0,K}^2 \geq c_1 \|v_h\|_{0,K}^2 - c_2^2 h^2 \|\mathrm{div}\, v_h\|_{0,K}^2$ für alle $v_h \in V_h$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\|v_h\|_{0,K} \leq \|\Pi_K^0 v_h\|_{0,K} + c_2 h_K \|\mathrm{div}\, v_h\|_{0,K}$ *für* $v_h \in V_h$.

b) Zeigen Sie, dass (*) für kleine $h > 0$ gleichmäßig inf-sup-stabil auf $U_h \times L_h$ ist.

Hinweis: Wähle $\phi_h|_K = \Pi_K^0(v_h)|_K + \nabla(w_h|_K)$, $\psi_h|_K = 2\,\Pi_K^0(w_h)|_K + \mathrm{div}(v_h)|_K$, $K \in \mathcal{K}_h$, *und verwende ohne Beweis* $\|w\|_{0,\Omega} \leq C|w|_{h,1,\Omega}$, $w \in H_0^1(\Omega) + W_h$.

Besprechung am **Dienstag, den 22. Oktober 2019, um 14:00-15:30 Uhr im Raum SR 3.69**.

Homepage: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/fem2019w/ erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.