## 3.1 Integration – Das bestimmte Integral

**(3.1)** $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu $f$, wenn $F$ differenzierbar auf $[a,b]$ ist, und wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$ gilt.

**(3.2)** a) $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ heißt eine *Zerlegung* von $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle. $\mathscr{Z}$ (oder $\mathscr{Z}[a,b]$) sei die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

b) $|Z| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - x_{i-1}|$ heißt *Feinheit* der Zerlegung.

c) *Riemann-Summe* $\quad R(f,Z,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) f(\xi_i) \quad$ (zu Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$)

d) *Untersumme* $\quad U(f,Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

e) *Obersumme* $\quad O(f,Z) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

**(3.3)** a) Die Grenzwerte $U(f) = \sup\{U(f,z) \mid Z \in \mathscr{Z}\}$ bzw. $O(f) = \inf\{O(f,z) \mid Z \in Z\}$ heißen *Riemannsches Unter- bzw. Oberintegral*.

b) Falls $U(f) = O(f)$, dann heißt $f$ *(Riemann)-integrierbar*.

Wir schreiben $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = U(f) = O(f)$ für das Integral.

## 3.1 Integration – Das bestimmte Integral

**(3.4)** a) Sei $a < c < b$. Dann gilt:

$f$ über $[a,b]$ integrierbar $\iff$ $f$ über $[a,c]$ integrierbar und $f$ über $[c,b]$ integrierbar.

Es gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

b) Das Integral ist linear: $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$.

c) Das Integral ist monoton: $f(x) \le g(x)$ in $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

**(3.5)** Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z \in \mathscr{Z}$ existiert mit $O(f,z) - U(f,z) < \varepsilon$.

**(3.6)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.

a) $f$ monoton $\Longrightarrow$ $f$ integrierbar.

b) $f$ stetig $\Longrightarrow$ $f$ integrierbar.

## 3.2 Integration – Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**(3.7)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

**(3.8)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

eine Stammfunktion zu $f$, d.h. $F' = f(x)$.

**(3.9)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

**(3.10)** Seien $f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \quad \text{(Partielle Integration)}$$

**(3.11)** Sei $g\colon [a,b] \longrightarrow [c,d]$ stetig differenzierbar, und sei $f\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt: $\displaystyle\int_a^b f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$ (Substitutionsregel).

## 3.2 Integration – Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

**(3.12)** Sei $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r$, dann gilt:

$$\int f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(k+1)} (x - x_0)^{k+1} + C \text{ für } x_0 - r < x < x_0 + r.$$

**(3.13)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$.

Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)p(x)dxx = f(\xi) \int_a^b p(x)dx$.

**(3.14)** Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in ]a,b[$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^n + R_n(x;x_0) \text{ mit dem Restglied } R_n(x;x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

**(3.15)** Ein rationales Polynom $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ besitzt eine *Partialbruch-Zerlegung*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\alpha_{j1}}{x - x_j} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{jr_j}}{(x - x_j)^{r_j}} \right) + \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{\beta_{k1} + \gamma_{k1} x}{(x - c_k)^2 + d_k^2} + \cdots + \frac{\beta_{ks_k} + \gamma_{ks_k} x}{\left((x - c_k)^2 + d_k^2\right)^{s_k}} \right).$$

## 3.3 Integration – Uneigentliche Integrale

**(3.16)** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) $f$ heißt *lokal integrierbar*, wenn $f$ über jedes kompakte Intervall $[a,b] \subset D$ integrierbar ist.

b) Sei $f$ über $[a,\infty[$ lokal integrierbar. Dann definiere $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

c) Sei $f$ über $\mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann definiere $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$

d) Sei $f$ über $]a,b[$ lokal integrierbar. Dann definiere $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{z\to a+}\int_z^c f(x)\,dx + \lim_{z\to b-}\int_c^z f(x)\,d$

**(3.17)** Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert $\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists C > a :$ $\displaystyle\left|\int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ für $z_2 > z_1 > C$

b) Wenn $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ existiert *(absolute Konvergenz)*, dann existiert auch $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$.

c) Sei $|f(x)| \le g(x)$ für $x \ge a$ und sei $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent, dann ist $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

d) Gilt $0 \le g(x) \le f(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent.

## 3.4 Integration – Rotationskörper

**(3.18)** a) Zu einem Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $Q(x) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K \right\}$ der *Querschnitt*.

b) Zu $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{y^2+z^2} \le f(x) \right\}$ ein Rotationskörper.

c) $F(x) = |Q(x)|$ bezeichnet die Querschnittsfläche, und $V = |K|$ das Volumen.

**(3.19)** Zu einer Zerlegung $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ ist $V(Z) = \sum_{i=1}^{n} |Q(x_i)|(x_i - x_{i-1})$

die entsprechende Riemannsumme für $V$.

**(3.20)** Haben jeweils zwei Körper $K$ und $K'$ die gleiche Querschnittsfläche $F(x) = |Q(x)| = |Q'(x)|$, dann sind ihre Volumen gleich $(V = |K| = |K'|)$ *(Prinzip von Cavalieri)*.

Das Volumen berechnet sich durch $V = \int_a^b |Q(x)|\, dx$.

Für einen Rotationskörper berechnet sich die Mantelfläche durch $M = \pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

## 3.5 Integration – Kurven

**(3.21)** a) Eine stetige Funktion $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung einer Kurve.

b) Wenn jede Komponente von $\mathbf{c}$ stetig differenzeirbar ist, heißt $\mathbf{c}$ eine $C^1$-Kurve.

c) Die Kurve heißt *glatt*, wenn $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [a,b]$.

**(3.22)** Zu jeder Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b\}$ sei $L(Z) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{c}(t_i) - \mathbf{c}(t_{i-1})\|$ die Länge des Polygonzugs $\mathbf{c}(t_0), \mathbf{c}(t_1), \ldots, \mathbf{c}(t_m)$. Wenn $\{L(Z) \mid Z \in \mathscr{Z}[a,b]\}$ beschränkt ist, dann heißt die Kurve *rektifizierbar* und $L(\mathbf{c}) = \sup\{L(Z) \mid Z \in \mathscr{Z}[a,b]\}$ heißt *Länge der Kurve*.

**(3.23)** Jede $C^1$-Kurve ist rektifizierbar, und für die Länge gilt $L(\mathbf{c}) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\,dt$.

**(3.24)** Eine *Umparameterisierung* einer Kurve $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine stetige, bijektive, monoton wachsende Funktion $h\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$.

**(3.25)** Die Länge einer $C^1$-Kurve ist parameterisierungsvariant.

**(3.26)** a) Sei $\mathbf{c}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $C^1$-Kurve. Dann heißt $S(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\|\,dt$ *Bogenlängenfunktion*.

b) Wenn $\mathbf{c}$ eine glatte $C^1$-Kurve ist, dann ist $S^{-1}\colon [0, L(\mathbf{c})] \longrightarrow [a,b]$ eine Umparameterisierung, und $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}\big(S^{-1}(s)\big)$ heißt *Parameterisierung nach der Bogenlänge*.

c) $\kappa(s) = \|\tilde{\mathbf{c}}''(s)\|$ heißt *Krümmung* von $\mathbf{c}$.

## 3.6 Integration – Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

**(3.27)** a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit der Periode* $T$, falls $f(t+T)=f(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

b) Eine Reihe der Form $f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\big)$ heißt *Fourier-Reihe*.

**(3.28)** Für *trigonometrische Polynome* $f_n(t)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)]=\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k\exp(ik\omega t)$

gilt $\gamma_0=\dfrac{1}{2}a_k,\ \gamma_k=\dfrac{1}{2}(a_e-ib_k),\ \gamma_{-k}=\overline{\gamma}_k,\ a_0=2\gamma_0,\ a_k=2\mathrm{Re}\gamma_k, b_k=2\mathrm{Im}\gamma_k\ (k=1,2,\dots,n)$.

**(3.29)** Es gilt für $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

a) $$\int_0^T \exp(ik\omega t)\exp(-i\,\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T & k=\ell\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$$

b) $$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T/2 & k=\ell\neq 0\\ T & k=\ell=0\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$$

c) $$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(\ell\omega t)\,dt=\begin{cases}T/2 & k=\ell\neq 0\\ 0 & k\neq\ell\end{cases}$$

d) $$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(\ell\omega t)\,dt=0.$$

## 3.6 Integration – Periodische Funktionen und Fourier-Reihen

**(3.30)** Sei $f\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stückeise stetig (d.h., es existiert eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$, so dass $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig ist). Dann heißt $\mathscr{F}(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$ mit $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt$ und $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt$ *Fourierreihe zu* $f$.

**(3.31)** Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodisch und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\mathscr{F}(f)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t^-) + f(t^+)\big).$$

**(3.32)** Sei $T_n = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t)\right\}$ der Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$, und sei $\mathscr{F}_n(f) \in T_n$ die Fourier-Approximation von $f$. Dann gilt

$$\|f - \mathscr{F}_n(f)\| \leq \|f - g\| \qquad \text{für alle } g \in T_n$$

bzgl. der Norm $\|g\| = \left(\frac{2}{T}\int_0^T \big(g(t)\big)^2\,dt\right)^{1/2}$.