## 4.1 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher – Partielle Ableitungen

**(4.1)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) $f$ heißt stetig in $\mathbf{x}$, wenn für jede Folge $\mathbf{x}_n \in U$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$.

b) $f$ heißt *partiell differenzierbar nach der $i$-ten Komponente*, wenn die Funktion

$t \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ differenzierbar ist.

**(4.2)** Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$ .

**(4.3)** a) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right) \in \mathbb{R}^{1,n}$ heißt Gradient.

b) $H_f(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})\right)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt Hesse-Matrix.

**(4.4)** Sei $\mathbf{x} \in U$ lokales Minimum von $f$. Dann gilt $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$ *(Notwendige Bedingung)*.

**(4.5)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar.
Sei $\mathbf{x} \in U$ ein *kritischer Punkt*, d.h. $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 0$. Dann gilt:

a) Ist $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit, dann ist $\mathbf{x}$ ein strenges lokales Minimum von $f$.

b) Ist $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit, dann ist $\mathbf{x}$ strenges lokales Maximum von $f$.

c) Ist $H_f(\mathbf{x})$ indefinit, dann ist $\mathbf{x}$ keine Extremstelle.

## 4.2 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher – Vektorfelder

**(4.6)** a) Eine Funktion $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld*.

b) Eine Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu $\mathbf{f}$, wenn $\operatorname{grad} F = \mathbf{f}$ gilt.

**(4.7)** Sei $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.
Wenn $\mathbf{f}$ eine Stammfunktion besitzt, dann gilt $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in U$.

**(4.8)** $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn $\mathbf{x} \in U$ existiert mit $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in U$ für $t \in [0,1]$ und $\mathbf{y} \in U$.

**(4.9)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und offen, und sei $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar mit $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ $\mathbf{x} \in U$. Dann existiert eine Stammfunktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ von $\mathbf{f}$.

**(4.10)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. $\mathbf{f}$ heißt (vollständig oder total) *differenzierbar* in $\mathbf{x}$, wenn eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ existiert mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - y\|)$,
(d.h. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\|\mathbf{h}\|}\big(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}h\big) = \mathbf{0}\big)$. Dann heißt $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$ Jacobi-Matrix.

**(4.11)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Wenn alle partiellen Ableitungen in $U$ existieren und in $\mathbf{x}$ stetig sind, dann ist $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, und es gilt: $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n}$.

## 4.3 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher – Totale Differenzierbarkeit

**(4.12)** Seien $U \subset \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\mathbf{f}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{g}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in D$.

Sei $\mathbf{g}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in U$, und $\mathbf{f}$ in $\mathbf{y}$ differenzierbar.

Dann ist $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ in $\mathbf{x}$ differenzierbar, und es gilt

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m,p} \ .$$

**(4.13)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $U$,

$\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in U$ und $\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\} = \{(1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} \mid t \in [0,1]\} \subset U$.

a) Dann existiert $\xi_1 \in \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f(\xi_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \ .$$

b) Wenn $f$ zweimal stetig differenzierbar ist, existiert $\xi_2 \in \operatorname{conv}\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\}$ mit

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\xi_2)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

## 4.4 Differentialrechnung – Minimierung unter Nebenbedingungen

**(4.14)** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

$\mathbf{x}^* \in U$ heißt *lokale Minimalstelle von $f$ unter der Nebenbedingung* $g(\mathbf{x}) = 0$, wenn $\delta > 0$ existiert mit

$$f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in U \text{ mit } g(\mathbf{x}) = 0 \text{ und } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta.$$

**(4.15)** $L \colon U \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$ heißt *Lagrange-Funktion*.

**(4.16)** Sei $\mathbf{x}^* \in U$ lokales Minimum von $f$ unter $g(\mathbf{x}) = 0$, und sei $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}^*) \neq 0$.

Dann existiert ein Lagrange-Parameter $\lambda^* \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}^*) + \lambda^* \operatorname{grad} g(\mathbf{x}^*) = 0 \ .$$