Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Cofaktormatrix)
Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Zeigen Sie, dass für die Cofaktormatrix

$$\mathsf{Cof}(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-\top}, \qquad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

gilt:

a) $\mathsf{Cof}(\mathbf{A}^\top) = \mathsf{Cof}(\mathbf{A})^\top$.

b) $\mathsf{Cof}(\mathbf{A})^\top \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathsf{Cof}(\mathbf{A})^\top = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$.

c) $\mathsf{Cof}(\mathbf{AB}) = \mathsf{Cof}(\mathbf{A})\mathsf{Cof}(\mathbf{B})$.

d) Sei nun speziell $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Eigenwerten $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte der Cofaktormatrix gilt:

$$\sigma(\mathsf{Cof}(\mathbf{A})) = \{\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\}.$$

Aufgabe 2 (Die Piola-Identität)
Sei $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Deformation und $\mathbf{F}$ der zugehörige Deformationsgradient mit $J = \det(\mathbf{F}) > 0$. Beweisen Sie die *Piola-Identität*

$$\mathsf{div}\left(\mathsf{Cof}(\mathbf{F})\right) = \mathsf{div}\left(J\mathbf{F}^{-\top}\right) = 0.$$

Aufgabe 3 (Konfigurationswechsel von Volumen- und Flächenelement)
Sei $V \subset \overline{\Omega}$ offen mit ∂V genügend glatt und $A \subset \partial V$ eine parametrisierbare Fläche. Weiter sei $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Deformation mit Deformationsgradient $\mathbf{F}$. Zeigen Sie:

a) $\int_{V^\varphi} d\mathbf{x}^\varphi = \int_V J d\mathbf{x}$.

b) $\int_{A^\varphi} d\mathbf{a}^\varphi = \int_A |\mathsf{Cof}(\mathbf{F})\mathbf{n}| d\mathbf{a}$.

Hinweis: Es gilt

$$\mathbf{n}^\varphi = \frac{\mathit{Cof}(\mathbf{F})\mathbf{n}}{|\mathit{Cof}(\mathbf{F})\mathbf{n}|}.$$

Aufgabe 4 (Topologische Eigenschaften der Deformation)
Sei $\varphi \in \mathrm{C}^0\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\right)$ und $\varphi|_\Omega$ injektiv. Zeigen Sie:

a) $\varphi\left(\overline{\Omega}\right) \subset \overline{\varphi(\Omega)}$.

b) $\varphi\left(\Omega\right) \subset \mathsf{int}\left(\varphi\left(\overline{\Omega}\right)\right)$.

c) $\varphi(\partial\Omega) \supset \partial\varphi(\overline{\Omega})$.

Falls zusätzlich $\mathsf{int}\left(\overline{\Omega}\right) = \Omega$ und $\varphi|_{\overline{\Omega}}$ injektiv:

d) $\varphi(\Omega) = \mathsf{int}\left(\varphi(\overline{\Omega})\right)$.

e) $\varphi(\partial\Omega) = \partial\varphi(\Omega) = \partial\varphi(\overline{\Omega})$.

Besprechung: **Donnerstag, 26. Oktober 2017, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30**.

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de