Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (Frobenius-Produkt und Deviatoren)
Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Das *Frobeniusprodukt* ist definiert als

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \operatorname{spur}\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{B}\right) = \sum_{n,m=1}^{N} A_{ij} B_{ij}.$$

Der *Deviator* einer Matrix ist definiert als

$$\operatorname{dev}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \frac{1}{N} \operatorname{spur}(\mathbf{C})\, \mathbf{I}_N.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der beiden Operatoren:

a) $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{I}_N : \mathbf{A} = \operatorname{spur}(\mathbf{A})$.

c) $\mathbf{A} : (\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^\top \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{C}^\top) : \mathbf{B}$.

d) $\operatorname{spur}(\operatorname{dev}(\mathbf{C})) = 0$ und $\operatorname{dev}(\mathbf{I}_N) = 0$.

e) $\operatorname{dev}(\operatorname{dev}(\mathbf{C})) = \operatorname{dev}(\mathbf{C})$.

Aufgabe 6 (Piola-Kirchhoff Spannungstensor)
Es seien $\lambda, \mu > 0$ Lamé-Konstanten und $\kappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ das Kompressionsmodul. Definiere den *Hookschen Tensor* $\mathbb{C} : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ durch

$$\mathbb{C}(\mathbf{E}) = 2\mu \operatorname{dev}(\mathbf{E}) + \kappa \operatorname{spur}(\mathbf{E})\, \mathbf{I}.$$

Zeigen Sie, dass die zugehörige Inverse $\mathbb{C}^{-1} : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{sym}}$ folgende Darstellung hat:

$$\mathbb{C}^{-1}(\mathbf{S}) = \frac{1}{2\mu} \operatorname{dev}(\mathbf{S}) + \frac{1}{9\kappa} \operatorname{spur}(\mathbf{S})\, \mathbf{I}.$$

Aufgabe 7 (Prinzipale Invarianten)

a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \iota_n(\mathbf{A}) \lambda^{N-n}$. Zeigen Sie, dass die *prinzipalen Invarianten* ι_n $(n = 1, \dots, N)$ der Rekursionsformel

$$\iota_n(\mathbf{A}) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \iota_k(\mathbf{A}) \operatorname{spur}\left(\mathbf{A}^{n-k}\right), \qquad n = 1, \dots, N$$

mit $\iota_0 = 1$ genügen.

b) Es sei $\varphi : \overline{\Omega} :\longrightarrow \overline{\Omega}^{\varphi}$ eine Deformation mit Deformationsgradient $\mathbf{F}$. Zeigen Sie, dass der rechte und linke Cauchy-Green-Verzerrungstensor

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^\top(\mathbf{x})\, \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})\, \mathbf{F}^\top(\mathbf{x})$$

das gleiche charakteristische Polynom

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + \iota_1(\mathbf{C})\lambda^2 - \iota_2(\mathbf{C})\lambda + \iota(\mathbf{C})$$

besitzen. Weisen Sie dazu nach, dass die prinzipalen Invarianten von folgender Gestalt sind:

$$\begin{aligned}
\iota_1 &= \operatorname{spur}(\mathbf{C}) = \operatorname{spur}(\mathbf{B}) \\
\iota_2 &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{spur}(\mathbf{C})^2 - \operatorname{spur}\left(\mathbf{C}^2\right)\right) = \operatorname{spur}(\mathrm{Cof}(\mathbf{C})) = \operatorname{spur}(\mathrm{Cof}(\mathbf{B})) \\
\iota_3 &= \frac{1}{6}\left(\operatorname{spur}(\mathbf{C})^3 - 3 \operatorname{spur}(\mathbf{C}) \operatorname{spur}\left(\mathbf{C}^2\right) + 2 \operatorname{spur}\left(\mathbf{C}^3\right)\right) = \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton: Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \iota_n(\mathbf{A}) \lambda^n$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \iota_n(\mathbf{A}) \mathbf{A}^n = 0.$$

Aufgabe 8
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Zeigen Sie:

$$\frac{\partial \iota_n(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}} \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} = \mathrm{Cof}(\mathbf{A}).$$

Besprechung: **Donnerstag, 9. November 2017, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30**.

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de