Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (Zur Polarzerlegung)
Es sei $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ein Deformationsgradient mit $J = \det \mathbf{F} > 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathrm{SO}(3)$ und symmetrische, positiv definite $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VS}.$$

Weiter sei $\mathbf{C} \in \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top,\ \det(\mathbf{A}) > 0\right\}$. Zeigen Sie:

a) Die durch die Polarzerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ definierten Abbildungen

$$\mathbf{F} \longmapsto \mathbf{R}, \qquad \mathbf{F} \longmapsto \mathbf{U}$$

sind stetig.

b) Die Abbildung $\psi \colon \mathbf{C} \longmapsto \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}$ ist glatt.

c) Die Abbildung $\phi \colon \mathbf{C} \longmapsto \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{C}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ ist glatt.

Aufgabe 10 (Der Satz von Da Silva)
Es sei $\mathbf{f}^\varphi \colon \Omega^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kraftdichte, $\mathbf{g}^\varphi \colon \Gamma^\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine Zugkraftdichte und $\mathbf{t}^\varphi : \Omega^\varphi \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die zugehörige Cauchy-Schnittspannung, die das *Axiom der Drehmomenterhaltung*

$$\int_{V^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = -\int_{\partial V^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{t}^\varphi\left(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi\right)\mathrm{d}\mathbf{a}^\varphi, \qquad V^\varphi \subset \Omega^\varphi$$

nicht erfüllen. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in SO(3)$ existiert, sodass

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{Q}\mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = -\int_{\Gamma^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{Q}\mathbf{g}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{a}^\varphi,$$
$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{Q}^\top\mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = -\int_{\Gamma^\varphi} \mathbf{Q}^\top\mathbf{x}^\varphi \wedge \mathbf{g}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{a}^\varphi.$$

Aufgabe 11 (Die Zentrifugalkraft)
Der Körper Ω werde in einem kartesischen Koordinatensystem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die $\mathbf{e}_1$-Achse gedreht. Zeigen Sie, dass die auf Ω^φ wirkende *Zentrifugalkraft*

$$\mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) = \omega^2 \rho^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)\left(\mathbf{x}_2^\varphi \mathbf{e}_2 + \mathbf{x}_3^\varphi \mathbf{e}_3\right), \qquad \mathbf{x}^\varphi \in \Omega^\varphi,$$

konservativ ist.

Aufgabe 12 (Mehrere Druckkräfte)
Es sei $M \geq 2$ und $\Gamma_N = \bigcup_{m=1}^M \Gamma_m$ mit $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Weiter seien π_m Konstanten und $\pi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, sodass $\pi|_{\overline{\Gamma}_m} = \pi_m$ für $m = 1, \ldots, M$ gilt.

Zeigen Sie, dass die *Druckkraft*

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\pi_m \mathrm{Cof}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_m,\ m = 1, \ldots, M$$

konservativ ist.

Hinweis: Beweisen Sie, dass

$$G(\boldsymbol{\varphi}) = -\int_\Omega \pi(\mathbf{x}) \det(\mathbf{F}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_\Omega \det(\mathbf{F})\left(\mathbf{F}^{-\top}\nabla\pi\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),$$

das Potential von $\mathbf{g}$ *ist.*

Besprechung: **Donnerstag, 23. November 2017, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30.**

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de