Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 4

Aufgabe 13 (Einfache Scherung)
Wir betrachten einen homogenen, isotropen Quader $\overline{\Omega}$, der sich aufgrund einer *Scherung* in x_2-Richtung wie folgt deformiert:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha x_3 \mathbf{e}_2.$$

Zeigen Sie, dass der Cauchy-Verzerrungstensor $\mathbf{T}^{\varphi}$ unabhängig von $\mathbf{x}^{\varphi}$ ist mit $T_{12}^{\varphi} = T_{13}^{\varphi} = 0$ und T_{23}^{φ} eine ungerade Funktion abhängig von α ist. Zeigen Sie außerdem, dass

$$T_{22}^{\varphi} - T_{33}^{\varphi} = \alpha T_{23}^{\varphi}.$$

Aufgabe 14 (Die Singulärwertzerlegung)
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine Matrix mit vollem Rang und $\lambda_n(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ für $n = 1,\dots,N$. Dann heißen

$$\mu_n(\mathbf{A}) = \lambda_n(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{\frac{1}{2}}, \qquad n = 1,\dots,N,$$

die *Singulärwerte* von $\mathbf{A}$. Zu jeder solchen Matrix $\mathbf{A}$ existiert eine *Singulärwertzerlegung*

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \operatorname*{diag}_{n=1,\dots,N}(\mu_n(\mathbf{A}))\mathbf{Q}^\top$$

mit orthogonalen Matrizen $\mathbf{R},\mathbf{Q} \in \mathrm{O}(N)$.
Seien $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit Singulärwerten α_n bzw. β_n für $n = 1,\dots,N$, wobei

$$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \dots \ge \alpha_N \ge 0, \qquad \beta_1 \ge \beta_2 \ge \dots \ge \beta_N \ge 0.$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$|\mathrm{spur}\,(\mathbf{AB})| \le \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\beta_n.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n\beta_n - \sum_{n,m=1}^{N} s_{nm}\alpha_n\beta_m \ge 0$$

für eine stochastische Matrix $\mathbf{S} = (s_{nm}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, *d.h.*

$$s_{nm} > 0, \qquad \sum_{n=1}^{N} s_{nm} = \sum_{m=1}^{N} s_{nm} = 1 \qquad \forall\, n,m = 1,\dots,N.$$

Aufgabe 15 (Murnaghan Materialien)
Es sei

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{x},\mathbf{C}) = \sum_{n=0}^{2} \gamma_n(\mathbf{x},\boldsymbol{\iota}_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^n$$

der zweite Piola-Kirchhoff Tensor eines objektiven, isotropen Materials. Außerdem seien γ_n zweimal differenzierbar in $\iota_{\mathbf{I}} = (3,3,1)$ für $n = 0,1,2$. Zeigen Sie, dass dann Konstanten $\nu_1,\dots,\nu_4$ existieren, sodass

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(\mathbf{C}) = \check{\Sigma}(\mathbf{E}) = &-\pi\mathbf{I}_3 + \lambda\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E})\,\mathbf{I}_3 + 2\mu\mathbf{E}\\ &+ \nu_1\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E}^2)\,\mathbf{I}_3 + \nu_1\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E})^2\,\mathbf{I}_3 + \nu_3\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E})\,\mathbf{E} + \nu_4\mathbf{E}^2\\ &+ o(\mathbf{E}^2).\end{aligned}$$

Aufgabe 16 (Ein Darstellungssatz)

Sei $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}$ eine Abbildung mit

$$(*) \qquad \mathbf{G}(\mathbf{QAQ}^\top) = \mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^\top, \qquad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{>0,\mathrm{sym}}, \mathbf{Q} \in \mathrm{SO}(3).$$

Zeigen Sie:

a) Gleichung $(*)$ gilt für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{>0,\mathrm{sym}}, \mathbf{Q} \in \mathrm{O}(3)$.
b) Gleichung $(*)$ gilt für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\mathrm{sym}}, \mathbf{Q} \in \mathrm{O}(3)$, falls $\mathbf{G}$ linear ist.
c) Falls $\mathbf{G}$ linear ist, dann exisiteren Konstanten $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \lambda\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{A})\,\mathbf{I}_3 + 2\mu\mathbf{A}.$$

Besprechung: **Donnerstag, 7. Dezember 2017, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30.**

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de