Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 (Das Tensor-Kreuzprodukt)
Es seien $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ Matrizen. Dann ist das linke bzw. rechte Matrix-Vektor-Kreuzprodukt definiert als diejenige Matrix, für die gilt

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{v} \times (\mathbf{A}\mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3,$$
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{v})\mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{v} \times \mathbf{z}), \qquad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3,$$

Außerdem ist das Matrix-Matrix-Kreuzprodukt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ so definiert, dass

$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{z} = (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) : (\mathbf{B} \times \mathbf{z}), \qquad \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) : \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) : \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) : \mathbf{B}$.
c) $\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \mathrm{spur}\,(\mathbf{A})\,\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}^\top$.
d) $(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) : \mathbf{A} = 6\det(\mathbf{A})$.
e) $\mathsf{Cof}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\mathbf{A} \times \mathbf{A}$.
f) $\mathbf{AC} \times \mathbf{BC} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathsf{Cof}(\mathbf{C})$.

Aufgabe 18 (Piola Identität mit Tensor-Kreuzprodukt)
Es sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \mathbf{a}_3)^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Zeilen $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$. Mit dem Kreuzprodukt aus vorheriger Aufgabe, definiere analog zur Rotation von Vektorfeldern

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \big(\mathrm{rot}(\mathbf{a}_1) \mid \mathrm{rot}(\mathbf{a}_2) \mid \mathrm{rot}(\mathbf{a}_3)\big)^\top,$$

mit

$$\mathrm{rot}(\mathbf{a}_i) = \begin{pmatrix} \partial_2 a_{i3} - \partial_3 a_{i2} \\ \partial_3 a_{i1} - \partial_1 a_{i3} \\ \partial_1 a_{i2} - \partial_2 a_{i1} \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,3\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathsf{Cof}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(\varphi \times \mathbf{F})$ und folgern Sie daraus die Piola Identität

$$\mathrm{div}(\mathsf{Cof}(\mathbf{F})) = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 19 (Koerzität von St. Venant-Kirchhoff Materialien)
Sei

$$\check{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E})^2 + \mu\,\mathrm{spur}\,(\mathbf{E}^2)$$

das Energiefunktional eines St. Venant Kirchhoff Materials. Zeigen Sie

$$\hat{W}(\mathbf{F}) \ge \alpha\left(\|\mathbf{F}\|^4 + \|\mathsf{Cof}(\mathbf{F})\|^2\right) + \beta, \qquad \alpha > 0.$$

Aufgabe 20 (Konvexe Hüller positiv definiter Matrizen)
Es sei $\mathbb{R}^{3\times 3}_{>0} = \{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \colon \det(\mathbf{F}) > 0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{conv}\left(\mathbb{R}^{3\times 3}_{>0}\right) = \mathbb{R}^{3\times 3},$$

wobei $\mathrm{conv}(\mathcal{M})$ die konvexe Hülle einer Menge $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Besprechung: **Donnerstag, 21. Dezember 2017, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30.**

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de