Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Christian Wieners • M.Sc. Jonathan Fröhlich

Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Wintersemester 2017/18

Übungsblatt 6

Es sei stets $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Deformation mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \partial_t \varphi$.
Zu einem Vektorfeld $\boldsymbol{\phi} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ bezeichne

$$\boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

die zugehörige Funktion in Euler-Konfiguration am Punkt $\mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 21 (Folgerung der Massenerhaltung)
Sei $\boldsymbol{\phi} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$ glatt und $\rho : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Dichtefunktion. Zeigen Sie unter der Annahme, dass das Prinzip der Massenerhaltung gilt, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V(t)} \boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \rho^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = \int_{V(t)} (\mathrm{d}_t \boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t)) \rho^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \, \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi .$$

Aufgabe 22 (Der Spin einer Deformation)
Wir bezeichnen den *Spin* von φ mit

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi - (\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi)^\top)$$

und mit

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^\varphi(\partial_t \mathbf{v}^\varphi) - (\mathrm{D}^\varphi(\partial_t \mathbf{v}^\varphi))^\top)$$

den schiefsymmetrischen Anteil des Beschleunigungsgradienten. Zeigen Sie:

a) $\partial_t(\mathbf{F}^\top \mathbf{W} \mathbf{F}) = \mathbf{F}^\top \mathbf{A} \mathbf{F}$,
b) $\partial_t \mathbf{W} + \mathrm{sym}(\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi)\mathbf{W} + \mathbf{W}\,\mathrm{sym}(\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi) = \mathbf{A}$.

Aufgabe 23 (Materielle Ableitung der Geschwindigkeit)
Zeigen Sie:

$$\mathrm{d}_t \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) = \partial_t \mathbf{v}^\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{D}^\varphi\big((\mathbf{v}^\varphi)^2\big) + 2\mathbf{W}\mathbf{v}^\varphi .$$

Aufgabe 24 (Harmonische Bewegungen)
Eine Deformation φ heißt *isochorisch*, falls

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V(t)} \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = 0, \qquad V(t) = \varphi(V_0, t) \text{ mit } V_0 \subset \Omega$$

und *rotationsfrei*, falls

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi - (\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi)^\top) = \mathbf{0}.$$

Zeigen Sie, dass für alle isochorischen, rotationsfreien Deformationen gilt:

$$\Delta^\varphi \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) = \mathrm{div}^\varphi\left(\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t)\right) = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 25 (Das Transporttheorem für Zirkulationen)
Es sei $\mathbf{c}_0 : [0,1] \longrightarrow \Omega$ eine Kurve durch Ω und $\mathbf{c}_t = \varphi(\mathbf{c}_0, t)$. Dann beschreibt

$$\int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = \int_0^1 \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{c}_t(\tau), t) \cdot \partial_\tau \mathbf{c}_t(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

die Zirkulation entlang $\mathbf{c}$ zum Zeitpunkt t.
Sei weiter $\boldsymbol{\phi} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbf{c}_t} \boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = \int_{\mathbf{c}_t} \Big(\partial_t \boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) + \boldsymbol{\phi}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t)\mathrm{D}^\varphi \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t)\Big) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi .$$

Zeigen Sie außerdem, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi = \int_{\mathbf{c}_t} \partial_t \mathbf{v}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x}^\varphi ,$$

falls $\mathbf{c}_0$ geschlossen ist.

Besprechung: **Donnerstag, 18. Januar 2018, um 9:45 Uhr im SR -1.015, Geb. 20.30.**

Homepage: http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/kontmech2017w/de