

**Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft
Wintersemester 2009/2010**

14. Übungsblatt vom 01. Februar 2010

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ gegeben. Die Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ und die zugehörigen Eigenräume

$$E(1) = \text{spann} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, E(0) = \text{spann} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, E(-1) = \text{spann} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix A (bezgl. der Standardbasis).

(b) Bestimmen Sie die Urbildmenge

$$T^{-1} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem charakteristischem Polynom

$$p_A(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^n.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\det A = \alpha_0$ und A ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(b) Ist A regulär, dann besitzen A und A^{-1} dieselben Eigenräume.

(c) Berechnen Sie für reguläres A die Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_n \lambda^n$$

von A^{-1} in Abhängigkeit von $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es sei

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 2\alpha \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \beta & 2 \\ -\alpha & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

eine 4×4 -Matrix mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie alle Paare (α, β) , für die $A_{\alpha, \beta}$ in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ diagonalisierbar ist, d.h. für die eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ existiert, so dass $S^{-1} A_{\alpha, \beta} S$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie für jedes (α, β) eine passende Transformationsmatrix S an.

Aufgabe 4: (4 Bonus- Punkte)

Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$B = A^{10} - 3A^9 - A^2 + 4A$$

mithilfe des Satzes von Cayley-Hamilton.

Abgabe

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 08. Februar 2010, 11.00 Uhr** in den mit „Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-F).