Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. T. Kreutzmann
Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft
Wintersemester 2009/2010

15. Übungsblatt vom 08. Februar 2010

Aufgabe 1:
Sei $p \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Funktionen

$$\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+ \,, \quad x \mapsto \|x\|_p := \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \,,$$
$$\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+ \,, \quad x \mapsto \|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \,.$$

(a) Skizzieren Sie die Einheitskreise $K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \infty$.

(b) Sei $p < 1$ und $n \geq 2$. Begründen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite (und symmetrische) Matrix.
Zeigen Sie, dass durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \langle v,w\rangle_A := \langle v, Aw\rangle_2 = v^t A w$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

Aufgabe 3:
Gegeben sei der Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{spann}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\2\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine ONB von U bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts.

Aufgabe 4:
Im $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt, seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2\\1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von z auf den Unterraum $U = \operatorname{spann}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe 5:
Es sei die Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Tx = Ax$, mit

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -\alpha \\ -1 & 4 & -\alpha \\ \alpha & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha > 0$, für die T eine Isometrie bezgl. des Euklidischen Skalarprodukt ist.

(b) Berechnen Sie für diese α aus (a) jeweils die Normalform $\widetilde{A}$ von T und eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $S^t AS = \widetilde{A}$ gilt.

Keine Abgabe!