Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

PD Dr. Nicolas Neuß
Dipl.-Math. techn. Hannes Gerner

08.11.2010

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft (Wintersemester 2010/2011)

Übungsblatt 4

Bearbeitungszeitraum: 08.11.2010-15.11.2010

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion. Ferner seien $U_1, U_2 \subset A$, $V_1, V_2 \subset B$ Untermengen von A und B. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
Beachten Sie dabei: f^{-1} bezeichnet hier nicht die Umkehrfunktion, es geht um das Urbild von f!

(a) $$f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$$

(b) $$f(U_1 \cup U_2) = f(U_1) \cup f(U_2)$$

(c) $$f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$$

(d) $$f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \exp(-x)$ und $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \log_2(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Bilder von f und g.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}((0,2])$ und $g^{-1}((2,8))$.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f und g auf $(0,5)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

(b) Für reelle Zahlen $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\prod_{i=0}^{n} (1 + x^{2^i}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} .$$

(c) Folgern Sie aus der geometrischen Summenformel, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $w, z \in \mathbb{R}$ gilt:
$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k .$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leq y^n \ .$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

(a) Verwenden Sie für $a \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $(a-1)^2 \geq 0$, um für $a > 0$ die Ungleichung

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

zu zeigen.

(b) Zeigen Sie induktiv und mit Hilfe von Aufgabenteil (a), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$(x_1 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2 \ .$$

Bemerkung: Die Ungleichung (b) schätzt den arithmetischen Mittelwert $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_2)$ gegen den harmonischen Mittelwert $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ ab.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Satz: Der Mars ist bewohnt.

Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist in einer Menge von n Planenten einer bewohnt, so sind alle bewohnt.

(a) Die Behauptung stimmt für $n = 1$.

(b) Wir betrachten die Menge aus $n+1$ Planeten $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$ von denen (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) p_1 bewohnt ist.

Nun betrachten wir die n Planeten $p_1, \ldots, p_n$. Da p_1 bewohnt ist, sind nach der Induktionsannahme alle bewohnt. Insbesondere ist p_n bewohnt. Dann betrachten wir die n Planeten $p_2, \ldots, p_{n+1}$. Da p_n bewohnt ist, sind diese nach der Induktionsannahme ebenfalls alle bewohnt.

Daher sind $p_1, \ldots, p_{n+1}$ bewohnt. Daraus ergibt sich die Behauptung: Da die Erde bewohnt ist, sind alle Planeten bewohnt, insbesondere der Mars.

Worin liegt der Fehler in diesem Beweis? Begründen Sie ausführlich.

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 15. November 2010, 09.30 Uhr** in den mit "Mathematik für die Fachrichtung Informationswirtschaft" gekennzeichneten Abgabekasten im 1.OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.