

PD Dr. Nicolas Neuß  
Dr. Markus Richter  
Dipl.-Math. techn. Hannes Gerner

## Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft (Wintersemester 2010/2011)

### Übungsblatt 10

Bearbeitungszeitraum: 20.12.2010-10.01.2011

#### Aufgabe 1

(1+2 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Zeigen Sie:

- (a)  $\text{Lin}(V, W)$ , die Menge aller linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ , versehen mit den Verknüpfungen

$$f + g: v \mapsto f(v) + g(v),$$
$$\lambda f: v \mapsto \lambda f(v)$$

für  $f, g \in \text{Lin}(V, W)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ist ein Vektorraum.

- (b) Es sei  $f \in \text{Lin}(V, W)$ . Dann sind auch

$$\text{Kern}(f) := \{v \in V: f(v) = 0\},$$
$$\text{Bild}(f) := \{w \in W \mid \exists v \in V: f(v) = w\}$$

Vektorräume.

#### Aufgabe 2

(1+1+1+1 Punkte)

Zeigen Sie, welche der nachfolgenden Funktionen linear sind und welche nicht. Dabei schreiben

wir für  $x \in \mathbb{R}^3$ :  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  und fassen  $\mathbb{C}$  als Vektorraum über  $\mathbb{R}$  auf.

- (a)  $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_2,$   
(b)  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1,$   
(c)  $f_3: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|,$   
(d)  $f_4: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \Re(z) + \Im(z).$

#### Aufgabe 3

(1+1+1+1+1 Punkte)

Beweisen Sie, welche der nachfolgenden Mengen Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$  sind.

- (a)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 \leq 1\}$ ,
- (b)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_3 = 0\}$ ,
- (c)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ ,
- (d)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 = 0\}$ ,
- (e)  $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq x_2\}$ ,
- (f)  $\left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}$ .

#### **Aufgabe 4**

(1+1+1 Punkte)

Seien  $U_1, U_2$  Untervektorräume des Vektorraums  $V$ . Beweisen Sie:

- (a)  $U_1 \cap U_2$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (b)  $U_1 \cup U_2$  ist genau dann ein Untervektorraum von  $V$ , wenn  $U_1 \subset U_2$  oder  $U_2 \subset U_1$ .
- (c)  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .

#### **Aufgabe 5**

(4 Bonus - Punkte)

In Wichtelhausen hat es über Nacht geschneit und der Weihnachtsmann muss jetzt die Straßen räumen. Dies will er möglichst schnell erledigen, da er bis Weihnachten noch jede Menge zu tun hat. Wichtelhausen ist schön regelmäßig aufgebaut: Das Straßennetz ist ein  $6 \times 6$ -Gitter (wie in Aufgabe 3 Blatt 5, allerdings nur mit Punkten  $(k, l) \in \{1, \dots, 6\}^2$ ). Der Weihnachtsmann startet links unten in der Ecke und beendet seine Räumungstour auch dort. Er braucht zur Räumung einer Straße (also einer Kante zwischen zwei Knoten) genau fünf Minuten. Wie muss er fahren, um möglichst wenig Zeit zu brauchen und wie lange dauert das?

#### **Aufgabe 6**

(4 Bonus - Punkte)

Wichtel Quacksalber hat zu Weihnachten eine neue Art Elfenbärchen erschaffen: Diese haben ein farbiges Fell und zwar jeweils in einer der drei Farben Rot, Grün oder Blau. Wenn zwei der Elfenbärchen aufeinandertreffen und unterschiedlichfarbiges Fell haben, dann färben sie sich spontan in die dritte Farbe um. Insgesamt hat Wichtel Quacksalber 12 rote, 16 grüne und 23 blaue Elfenbärchen erschaffen. Diese Vielfarbigkeit gefällt ihm aber gar nicht. Ist es möglich, dass sich nach einer Weile alle Bärchen in einer Farbe eingefärbt haben?

**Wir wünschen Ihnen frohe Feiertage und alles Gute im Neuen Jahr!**

---

#### **Abgabe**

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 10. Januar 2011, 09.40 Uhr** in den mit "Mathematik für die Fachrichtung Informationswirtschaft" gekennzeichneten Abgabekasten im 1.OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.