Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

PD Dr. Nicolas Neuß
Dr. Markus Richter
Dipl.-Math. techn. Hannes Gerner

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft (Wintersemester 2010/2011)

Übungsblatt 11

Bearbeitungszeitraum: 10.01.2011-17.01.2011

Aufgabe 1

(1+1+2+2 Punkte)

Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{P}_3$ der Polynome von Grad kleiner gleich 3 die Polynome

$$p_1(x) := 2 + 2x + 3x^2 \ ,$$
$$p_2(x) := 1 + x^2$$
$$p_3(x) := 4x + 2x^2 \ .$$

(a) Sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $\mathrm{Spann}\{p_1, p_2, p_3\}$.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus f von $\mathbb{P}_3$ nach $\mathbb{R}^4$ an und beweisen Sie, dass dies ein Isomorphismus ist. Bestimmen Sie weiterhin die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{P}_3$.

(d) Geben Sie eine lineare Abbildung $\Delta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ an, so dass $f^{-1} \circ \Delta \circ f$ der Ableitungsoperator auf $\mathbb{P}_3$ ist.

Erinnerung: Ein Monom $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m(x) := x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ hat die Ableitung $m'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m'(x) = nx^{n-1}$.

Aufgabe 2

(2+2+2 Punkte)

Es seien a_1, a_2, a_3 und a_4 die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer, wobei a_1 die viertletzte Ziffer sei, a_2 die drittletzte und so weiter.

(a) Sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ v_4 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig (mit Beweis!)?

(b) Bestimmen Sie die Dimension des von v_1, v_2, v_3 und v_4 aufgespannten Vektorraums. Geben Sie eine Basis dieses Vektorraums an.

(c) Stellen Sie v_4 als Linearkombination der Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dar.

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

(a) Die Menge $G := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon 2x_1 + 3x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ definiert eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, also einen zweidimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ (dies ist nicht zu zeigen). Bestimmen Sie eine Basis von V, also zwei Vektoren, welche die Ebene aufspannen.

(b) Wählen Sie aus

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine möglichst große Teilmenge linear unabhängiger Vektoren aus und stellen Sie die restlichen Vektoren als deren Linearkombination dar.

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 17. Januar 2011, 09.40 Uhr** in den mit "Mathematik für die Fachrichtung Informationswirtschaft" gekennzeichneten Abgabekasten im 1.OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.