Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

PD Dr. Nicolas Neuß
Dr. Markus Richter
Dipl.-Math. techn. Hannes Gerner

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft (Wintersemester 2010/2011)

Übungsblatt 12

Bearbeitungszeitraum: 17.01.2011-24.01.2011

Aufgabe 1 (4*0.5 Punkte)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet A_{ij} für $i \in \{1,\dots,m\}$ und $j \in \{1,\dots,n\}$ die Komponente von A in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Ferner bezeichnet $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die *Transponierte* der Matrix A, wobei

$$(A^t)_{ij} := A_{ji} \quad \text{für } i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m\ .$$

Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

(a) $(A+B)^t = A^t + B^t$,

(b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$,

(c) $(A^t)^t = A$,

(d) $(AB)^t = B^t A^t$.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

(a) Es seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $A+B, A-B, AB, BA, (AB)^t$ und $(BA)^t$.

(b) Jetzt seien die reellen Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie, falls möglich, $C+D, CD, DC, C^t + 2D$.

Aufgabe 3 (2+1,5+1+1 Punkte)

(a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Wann gilt $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$? Geben Sie in diesem Fall $(A+B)^k$ für $k \in \mathbb{N}$ ausmultipliziert an.

(b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ein $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = 0$, aber $BA \neq 0$.

(d) Finden Sie ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ein $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = BA = 0$, aber $A \neq 0$ und $B \neq 0$.

Aufgabe 4 (2,5+1 Punkte)

(a) Es sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Welchen Vektor erhalten Sie, wenn Sie v um $90°$ im Uhrzeigersinn drehen, ihn dann an der x_2-Achse spiegeln und zu guter Letzt auf die x_1- Achse projizieren? Geben Sie die Matrixdarstellung der zugehörigen Abbildung an.

(b) Es sei für $\alpha, r \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha, r) := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} .$$

Was für ein Objekt stellt das Bild von $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^3$ mit $f(r) := A(r, r) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ dar?

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 24. Januar 2011, 09.40 Uhr** in den mit "Mathematik für die Fachrichtung Informationswirtschaft" gekennzeichneten Abgabekasten im 1.OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes (Kaiserstr. 93) ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe.