Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

PD Dr. Nicolas Neuß
Dr. Markus Richter
Dipl.-Math. techn. Hannes Gerner

Mathematik I für die Fachrichtung Informationswirtschaft (Wintersemester 2010/2011)

Übungsblatt 15

Bearbeitungszeitraum: 07.01.2011-14.01.2011

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom

$$p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\det A = a_0$ und A ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(b) Ist A regulär, dann besitzen A und A^{-1} dieselben Eigenräume.

(c) Berechnen Sie für reguläres A die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_n$ des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n$$

von A^{-1} in Abhängigkeit von $a_0, \ldots, a_n$.

Aufgabe 2

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, d.h. $\det A \neq 0$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A zum Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

(a) Für $s \in \mathbb{C}$ ist x ein Eigenvektor von $(A + s\mathbb{1}_n)$ zum Eigenwert $\lambda + s$.

(b) x ist ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(c) Für $s \in \mathbb{C} \setminus (-\sigma(A))$ ist x ein Eigenvektor von $(A + s\mathbb{1}_n)^{-1}$ zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda+s}$.

Aufgabe 3

Kreuzen Sie die wahren Aussagen an.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- ☐ A hat wenigstens einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^n$.
- ☐ A hat dieselben Eigenwerte wie A^t.
- ☐ A besitzt im Fall $n = 3$ wenigstens ein Eigenwert/Eigenvektor-Paar.

- ☐ Falls alle Eigenwerte von A gleich 1 sind, so ist A die Einheitsmatrix.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

- ☐ A hat wenigstens einen Eigenvektor in $\mathbb{C}^n$.
- ☐ A lässt sich durch einen Basiswechsel der Form $A' = SAS^{-1}$ immer auf Diagonalgestalt bringen.
- ☐ A kann auch reelle Eigenwerte haben.
- ☐ A besitzt mit dem Eigenwert λ auch den Eigenwert $\bar{\lambda}$.

(c) Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- ☐ ist 0, wenn A regulär ist.
- ☐ ist immer positiv.
- ☐ kann auch komplexe Werte annehmen.
- ☐ ist 2, wenn A die Darstellung einer Streckung um den Faktor 2 ist.

Aufgabe 4

Es sei

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 2\alpha \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \beta & 2 \\ -\alpha & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

eine 4×4-Matrix mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Paare (α, β), für die $A_{\alpha,\beta}$ in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ diagonalisierbar ist, d.h. für die eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ existiert, sodass $S^{-1}A_{\alpha,\beta}S$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie für jedes (α, β) eine passende Transformationsmatrix S an.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur!

Abgabe

Für dieses Blatt gibt es keine Abgabe und daher weder Korrektur noch Punkte. Die Musterlösung wird nächsten Montag auf den internen Seiten veröffentlicht.