1 Allgemeine Grundlagen

Aussagen sind Behauptungen, für die sich entscheiden läßt, ob sie *wahr* oder *falsch* sind.

(1.1) Verknüpfte Aussagen, die immer wahr sind, heißen *Tautologien*.

(1.2) Die Kontraposition $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$ ist eine Tautologie.

Direkter Beweis: $A \Longrightarrow B$
Aus der Voraussetzung A folgt die Behauptung B.

Indirekter Beweis: $\neg B \Longrightarrow \neg A$
Angenommen, die Voraussetzung A gelte, aber die Behauptung B sei falsch. Dann zeige, dass auch die Voraussetzung A falsch sein muss, Widerspruch!

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen. Sie haben keinen Wahrheitswert; erst durch Einsetzen der Variablen lässt sich der Wahrheitswert bestimmen.

Wir verwenden Quantoren:

$\forall x \in M : A(x)$	für alle x in der Menge M ist die Aussage $A(x)$ wahr
$\exists x \in M : A(x)$	es existiert ein x in der Menge M, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist
$\exists! x \in M : A(x)$	es existiert genau ein x in der Menge M, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist

1 Allgemeine Grundlagen

Mengenbegriff nach Cantor: Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter und unterscheidbarer Dinge zu einem Ganzen.

Wir schreiben $x \in M$, wenn x Element der Menge M ist, und $M \subset N$, falls $x \in M \Rightarrow x \in N$.

Vereinigung $M \cup N = \{x \colon x \in M \vee x \in N\}$
Durchschnitt $M \cap N = \{x \colon x \in M \wedge x \in N\}$
Differenz $M \setminus N = \{x \in M \colon x \notin N\}$
Cartesisches Produkt $M \times N = \{(x,y) \colon x \in M \wedge y \in N\}$
Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M) = \{A \colon A \subset M\}$ umfasst die Menge aller Teilmengen von M.

Seien M, N Mengen. Eine Funktion (Abbildung) f ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau einen Wert $y = f(x) \in N$ zugeordnet. Wir schreiben $f \colon M \longrightarrow N$, $x \longmapsto f(x)$.

(1.5) a) $f \colon M \to N$ heißt *surjektiv*, wenn $N = f(M)$ gilt.
b) $f \colon M \to N$ heißt *injektiv*, wenn gilt: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
c) $f \colon M \to N$ heißt *bijektiv*, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Sei $y \in N$.
a) Wenn $f \colon M \to N$ surjektiv ist, ist die Gleichung $f(x) = y$ immer lösbar.
b) Wenn $f \colon M \to N$ injektiv ist und Gleichung $f(x) = y$ lösbar ist, ist die Lösung eindeutig.
c) Wenn $f \colon M \to N$ bijektiv, ist $f(x) = y$ immer lösbar und die Lösung ist eindeutig.