3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.1) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine kommutative Gruppe V bzgl. der Operation $+$ ist ein *Vektorraum* über $\mathbb{K}$, wenn eine Operation

$$\begin{array}{rrcl} \cdot\, : & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda, \mathbf{v}) & \rightarrowtail & \lambda \mathbf{v} \end{array}$$

existiert mit
i) $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \;\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) & = & \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w} \\ (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} & = & \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v} \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{v} & = & \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v}) \end{array}$$

ii) für die Eins $1 \in \mathbb{K}$ gilt $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(3.2) Eine Teilmenge $W \subset V$ von einem Vektorraum V heißt (linearer) *Unterraum* von V, falls W bzgl. $+$ und $\cdot$ selbst ein Vektorraum ist.

(3.3) Sei V ein Vektorraum. $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn
a) $\mathbf{0} \in W$
b) $\forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$: $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$
c) $\forall\, \mathbf{w} \in W \,\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot \mathbf{w} \in W$

3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.4) Sei V ein Vektorraum und sei $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m \in V$. Dann heißt $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit $\lambda_j \in \mathbb{K}$ eine *Linearkombination* von $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$. Alle Linearkombinationen von $\mathbf{v}_1 \dots,\mathbf{v}_m$ bilden den Spann $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\} = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j | \lambda_j \in \mathbb{K}\}$. $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\} \subset V$ ist ein linearer Teilraum.

(3.5) Eine Menge $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\} \subset V$ heißt *linear unabhängig*, falls gilt:

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \lambda_j \in \mathbb{K} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

$B = \{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_N\}$ heißt *Basis* von V, wenn $\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_N$ linear unabhängig und $\operatorname{span}\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_N\} = V$.

(3.6) Ist $B = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_N\}$ eine Basis von V, so lässt sich jeder Vektor $\mathbf{u} \in V$ als Linearkombination $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit eindeutigen Skalaren $\lambda_j \in \mathbb{K}$ darstellen (Basisdarstellung).

(3.7) Sei $B = \{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_N\}$ eine Basis von V, und sei $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{v}_j$ mit $\lambda_k \neq 0 \quad (k \in \{1,\dots,N\})$. Dann ist auch $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{k-1},\mathbf{w},\mathbf{v}_{k+1},\dots,\mathbf{v}_N\}$ eine Basis von V.

3 Lineare Algebra – Vektorräume

(3.8) Sei $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N\}$ eine Basis von einem Vektorraum V, und sei $m > N$. Dann ist $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\} \subset V$ linear abhängig.

(3.9) Wenn ein Vektorraum V eine endliche Basis hat, dann ist jede Basis von V endlich, je zwei Basen haben die gleiche Anzahl von Elementen $\dim V$.

(3.10) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

(3.11) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$.

a) Eine Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ heißt *linear*, wenn

$$\begin{array}{llcl} \forall\, \mathbf{w} \in V: & T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & = & T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) \\ \forall\, \mathbf{v}\, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}: & T(\lambda \mathbf{v}) & = & \lambda T(\mathbf{v}) \end{array}$$

b) Eine Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ heißt *Isomorphismus*, wenn sie linear und bijektiv ist.

c) V und W heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus $T\colon V \longrightarrow W$ existiert.

(3.12) Zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$ Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension haben.

3 Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

Gesucht sind N Unbekannte $x_1,\dots,x_N$, die M lineare Gleichungen erfüllen:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + & a_{1N}x_N = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + & a_{2N}x_N = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + & \cdots & + & a_{MN}x_N = & b_M. \end{array}$$

Dabei seien a_{nm} für $1 \le m \le M$ und $1 \le n \le N$ und b_m für $1 \le m \le M$ gegeben.

(3.14)

a) $\mathbb{K}^{M\times N} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{mn} \in \mathbb{K} \\ m = 1,\dots,M \\ n = 1,\dots,N \end{array} \right\}$ Vektorraum der $M \times N$ Matrizen

b) Zu $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ und $x \in \mathbb{K}^N$ definiere $b = Ax$ mit $b_m = \sum_{n=1}^{N} a_{mn}x_n$, d.h.

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^N a_{Mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^M.$$

Die Abbildung $T_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto Ax$ ist linear: $T_A(\lambda x + \mu y) = \lambda T_A(x) + \mu T_A(y)$.

3 Lineare Algebra – Lineare Gleichungssysteme

(3.15) Zu $A \in \mathbb{K}^{P\times M}, B \in \mathbb{K}^{M\times N}$ definiere $C = A\cdot B \in \mathbb{K}^{P\times N}$ durch $(c_{pn}) = \Big(\sum_{m=1}^{M} a_{pm}b_{mn}\Big)_{\substack{p=1,\dots,P\\ n=1,\dots,N}}$

(3.16) Zu $T_A\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^P$, $y \mapsto Ay$ und $T_B\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $x \mapsto Bx$ gilt $T_A \circ T_B = T_{AB}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^P$, $x \mapsto ABx$.

(3.17) $\mathbb{K}^{N\times N}$ ist ein nicht-kommutativer Ring mit neutrales Element bezüglich der Multiplikation

$$I_n = \operatorname{diag}(1,\dots,1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(3.18) Zu $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ definiere $A^T \in \mathbb{K}^{N\times M}$ durch Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{M1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1N} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

A^T heißt die *transponierte Matrix*.

(3.19) $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt symmetrisch, wenn $A^T = A$, und orthogonal, wenn $AA^T = I_N = A^T A$.

(3.20) Zu $A = \big(a_{mn}\big)_{\substack{m=1,\dots,M\\ n=1,\dots,N}} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ definiere

$\overline{A} = (\overline{a}_{jk})$ konjugierte Matrix

$A^H = \overline{A}^T$ adjungierte Matrix

$A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt hermitisch, wenn $A^H = A$, und unitär, wenn $AA^H = I_n = A^H A$.

(3.21) Sei $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$.

a) Die Lösungen $\mathbf{x}_h \in \mathbb{K}^N$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bilden einen linearen Teilraum des $\mathbb{K}^N$. Er heißt *Kern* (*Nullraum*) von A. Ist $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ eine Basis von Kern(A), so ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\mathbf{x}_h = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$ mit $\alpha_j \in \mathbb{K}$.

b) Ist $\mathbf{x}_s$ eine spezielle Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dann lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_h = \mathbf{x}_s + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$.

(3.22) Sei $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$ eine Matrix mit den Spalten $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)}$, d.h. $A = (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)})$.
Dann definiere das Bild$(A) := \operatorname{span}\{\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)}\} \subset \mathbb{K}^M$ und Rang$(A) = \dim \text{Bild}(A)$.

(3.23) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathbf{b} \in$ Bild(A).

(3.24) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn Rang$(A) =$ Rang$(A|\mathbf{b})$.

(3.25) Sei $N > M$. Dann hat das homogene System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ immer eine nicht-triviale Lösung.

(3.26) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Dann ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn Rang$(A) = N$ gilt.

(3.27) Es gilt $\dim \text{Bild}(A) + \dim \text{Kern}(A) = N$.

3 Lineare Algebra – Gauß-Elimination

Karlsruhe Institute of Technology

Setze $A^{(1)} = A$ und $b^{(1)} = b$. Für $k = 1, ..., r-1$ vertausche Zeilen bzw. Spalten, so dass $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Subtrahiere das $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$-fache der k-ten Zeile von der m-ten Zeile

$$a_{mj}^{(k+1)} = a_{mj}^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\ a_{kj}^{(k)}, \qquad b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\ b_k^{(k)}, \qquad m = k+1, \dots, M, \quad j = k, \dots, N$$

bis im Schritt r gilt:

$$\left(A^{(r)} \middle| b^{(r)}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1N} & b_1 \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{2N}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ & \mathbf{0} & & & & & b_{r+1}^{(r)} \\ & & & & \mathbf{0} & & \vdots \\ & & & & & & b_M^{(r)} \end{array}\right)$$

$A^{(r)}x = b^{(r)}$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_M^{(r)} = 0$ gilt.

Zu $x_{r+1}, ..., x_N$ berechne rückwärts $x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^N a_{kj}^{(k)} x_k\right) / a_{kk}^{(k)}$ für $k = r, r-1, ..., 1$.

Anschließend müssen bei Spaltenvertauschungen die Komponenten x_n umnummeriert werden.

(3.28) Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt *regulär* (nicht singulär), wenn $\mathrm{Rang}(A) = N$ gilt. Sonst heißt sie *singulär*.

(3.29) Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist äquivalent:

a) Die Zeilenvektoren sind linear unabhängig.
b) Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig.
c) A ist regulär.
d) $\mathrm{Rang}\, A = N$.
e) $Ax = b$ ist für jede rechte Seite lösbar.
f) $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar.
g) Die homogene Gleichung $Ax = 0$ hat nur triviale Lösungen.

(3.30) Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$.
Wenn ein inverses Element $X \in \mathbb{K}^{N\times N}$ bzgl. $\cdot$ existiert mit $XA = AX = I_N$,
dann heißt $X = A^{-1}$ *inverse Matrix* zu A.

(3.31) Zu $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ existiert genau dann eine inverse Matrix A^{-1}, wenn A regulär ist.

Zu einer Permulation $\sigma \in S_N$ ist dier Permutationsmatrix $P = P_\sigma$ mit $P_\sigma x = (x_{\sigma(k)})_k = 1, ..., N$ regulär mit $P^{-1} = P^T$.

3 Lineare Algebra – LR-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche

Sei $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ eine reguläre Matrix.
Starte mit dem Permutationsvektor $\sigma = (1,\dots,N)$.

$$
\begin{array}{l}
\text{für } k = 1,\dots,N-1 \\
\quad \text{wähle } n \geq k \text{ mit } |a_{nk}| \geq |a_{jk}| \text{ für } k \leq j \leq N \\
\quad \text{falls } a_{nk} = 0 \quad \text{Abbruch } (A \text{ singulär}) \\
\quad \text{Vertausche Zeilen } n \text{ und } k: \\
\quad \text{für } j = 1,\dots,N \\
\qquad z = a_{nj}, \quad a_{nj} = a_{kj}, \quad a_{kj} = z \\
\qquad s = \sigma(n), \quad \sigma(n) = \sigma(k), \quad \sigma(k) = s \\
\quad \text{für } n = k+1,\dots,N \\
\qquad a_{nk} := \dfrac{a_{nk}}{a_{kk}} \\
\qquad \text{für } \; j = k+1,\dots,N \\
\qquad\quad a_{nj} := a_{nj} - a_{nk}\, a_{kj}
\end{array}
$$

Setze $\ell_{nj} = a_{nj}$ für $n > j$, $r_{nj} = a_{nj}$ für $n \geq j$ und die Permutationsmatrix $P = P_\sigma$.

(3.32) Der Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche liefert für jede reguläre Matrix A eine Permutationsmatrix P, eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine reguläre obere Dreiecksmatrix R mit $PA = LR$. Dann berechnet sich $Ax = b$ aus $Ly = Pb$, $Rx = y$.

3 Lineare Algebra – Determinanten

Für eine Permutation $\sigma \in S_N$ heißt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{a<b} \frac{\sigma(a) - \sigma(b)}{a - b} \in \{-1, 1\}$ die *Signum*-Funktion.

Es gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \mu) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\mu)$.

(3.33) Zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ definiere die *Determinante*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{N,\sigma(N)}.$$

(3.34) Die Determinante ist in jeder Zeile linear:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T + \lambda \tilde{\mathbf{a}}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} + \lambda \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix}.$$

(3.35) Vertauschen von zwei Zeilen ändert nur das Vorzeichen:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N^T \end{pmatrix}.$$

3 Lineare Algebra – Determinanten

(3.36) $\det(A) = \det(A^T)$

(3.37) Für $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist äquivalent:
a) $\det(A) \neq 0$
b) die Zeilen von A sind linear unabhängig
c) die Spalten von A sind linear unabhängig
d) A ist regulär.

(3.38) Es gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(3.39) Zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ definiere $A_{kn} \in \mathbb{K}^{N-1\times N-1}$ durch Streichen der Zeile k und Spalte n.

Dann gilt: $\det(A) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+n} a_{kn} \det(A_{kn}) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{k+n} a_{kn} \det(A_{kn})$.

Sei $\mathrm{Cof}(A) = \Big((-1)^{k+n}\det(A_{kn})\Big)_{k,n=1,..,N} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Wenn A regulär ist, gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Cof}(A)^T$$

(3.40) Sei $A = (a^{(1)}|\cdots|a^{(N)}) \in \mathbb{K}^{N\times N}$ regulär und $b \in \mathbb{K}^N$.
Dann gilt für die Lösung $x \in \mathbb{K}^N$ von $Ax = b$:

$$x_k = \frac{\det(a^{(1)}|\cdots|b|\cdots|a^{(N)})}{\det(a^{(1)}|\cdots|a^{(k)}|\cdots|a^{(N)})} \qquad \text{(Cramersche Regel)}$$