4 Lineare Abbildungen – Basisdarstellungen

(4.1) Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, und sei $T\colon V \to W$ linear.
Sei $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}$ Basis von V und $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M\}$ Basis von W. Sei $T(\mathbf{v}_j) = \sum_{k=1}^{M} a_{kj}\mathbf{w}_k$, $a_{kj} \in \mathbb{K}$, eine Basis-Darstellung ($j = 1, \dots, N$). Dann heißt $A = (a_{kj}) \in \mathbb{K}^{M\times N}$ *Matrix-Darstellung* von T.

(4.2) Es gilt $\quad \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \iff \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{N} x_j\mathbf{v}_j,\ \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{M} y_k\mathbf{w}_k$, und $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(4.3) Sei $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_N\}$ Basis von V, und seien s_{jk} die Koordinaten von $\tilde{\mathbf{v}}_k$ mit $\tilde{\mathbf{v}}_k = \sum_{j=1}^{N} s_{jk}\mathbf{v}_j$.
Dann gilt: S ist regulär, und S^{-1} beschreibt den Basiswechsel von $\{\tilde{\mathbf{v}}_j\}$ zu $\{\mathbf{v}_j\}$.

(4.4) Sei $R = (r_{ml}) \in \mathbb{R}^{M\times M}$ mit $\tilde{\mathbf{w}}_l = \sum_{m=1}^{M} r_{il}\mathbf{w}_i$ Matrix zum Basiswechsel von $\{\mathbf{w}_m\}$ zu $\{\tilde{\mathbf{w}}_j\}$.
Dann ist $B := R^{-1}AS$ Matrixdarstellung von T bzgl. $\{\tilde{\mathbf{v}}_j\}$ und $\{\tilde{\mathbf{w}}_j\}$.

(4.5) A und B in $\mathbb{K}^{M\times N}$ heißen äquivalent, wenn es reguläre Matrizen $S \in \mathbb{K}^{N\times N}$ und $R \in \mathbb{K}^{M\times M}$ gibt mit $B = R^{-1}AS$.

(4.6) $A \in \mathbb{K}^{M\times N}$ ist äquivalent zu $D_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{M\times N}$ mit $r = \operatorname{rang} A$.
$A, B \in \mathbb{K}^{M\times N}$ sind genau dann äquivalent, falls $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

4 Lineare Abbildungen – Eigenwerte

(4.7) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißen *ähnlich*, wenn eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{N\times N}$ mit $B = S^{-1}AS$ existiert. $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, d. h. wenn eine reguläre Matrix S existiert mit

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

(4.8) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* (EW) zu $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, wenn es $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^N$, $\mathbf{v} \neq 0$ gibt mit $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Dann heißt $\mathbf{v}$ *Eigenvektor* (EV), und $E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^N \colon A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$ heißt *Eigenraum*.

(4.9) $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$ ist genau dann diagonalisierbar, falls es eine Basis von $\mathbb{K}^N$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht.

(4.10) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_N)$ heißt *charakteristisches Polynom* von A.

(4.11) $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Eigenvektor von $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$

$\chi_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \lambda^n$ ist ein Polynom von Grad N mit

$$\alpha_N = (-1)^N, \qquad \alpha_{N-1} = (-1)^{N-1}\operatorname{Spur}(A), \qquad \alpha_0 = \det A.$$

(4.12) a) Die Vielfachheit a_λ eines EW λ als Nullstelle von χ_A heißt *algebraische Vielfachheit*.
b) Die Dimension $g_\lambda = \dim E(\lambda)$ des Eigenraums $E(\lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit*.

4 Lineare Abbildungen – Eigenwerte

(4.13) Eigenvektoren einer Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(4.14) Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit N verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

(4.15) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ähnliche Matrizen. Dann haben sie das gleiche charakteristische Polynom, gleiche Eigenwerte mit gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, gleiche Determinanten und Spuren.

(4.16) Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Dann gilt: $1 \le g_\lambda \le a_\lambda \le N$.

(4.17) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte gilt: $a_\lambda = g_\lambda$.
Ist $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ diagonalisierbar und sind alle Eigenwerte reell, so lassen sich auch die Eigenvektoren reell wählen.

(4.18) Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ eine hermitische Matrix, d.h. $A = A^H$ (mit $A^H = \bar{A}^T$). Dann gilt:
a) Die Eigenwerte von A sind reell.
b) Seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ EV zu den EW λ und μ mit $\lambda \neq \mu$, dann gilt: $\mathbf{v}^H \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} \bar{\mathbf{v}}_k \mathbf{w}_k = 0$.
Symmetrische reelle Matrizen haben reelle Eigenwerte.

(4.19) Sei $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(A) = \det(A - \lambda I_N) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \lambda^k$.
Dann gilt $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k A^k = 0$.

4 Lineare Abbildungen – Orthogonalität

(4.20) a) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^N$ heißen orthogonal, wenn $\mathbf{v}^H \mathbf{w} = 0$.
b) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ heißt Orthogonalsystem, wenn $\mathbf{v}_j^H \mathbf{v}_k = 0$ für $j \neq k$, $j, k = 1, \dots, m$,
und Orthonormalsystem, wenn zusätzlich $\mathbf{v}_j^H \mathbf{v}_j = 1$ für $j = 1, \dots, m$.
c) Eine Basis $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ heißt Orthonormalbasis (ONB), wenn $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N$ orthonormal sind.

(4.21) Ein Orthogonalsystem $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ ist linear unabhängig.

(4.22) Jeder Vektorraum $W \subset \mathbb{K}^N$ besitzt eine Orthonormalbasis.

(4.23) $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ heißt normal, wenn $A^H A = A A^H$.

(4.24) Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ normal, d.h. $A^H A = A A^H$. Dann ist A diagonalisierbar, und A besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
Hermitische komplexe Matrizen und symmetrische reelle Matrizen sind diagonalisierbar.

(4.25) Sei $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\}$ eine ONB von $\mathbb{C}^N$.
Dann heißt $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{w}_k^H \mathbf{x}) \mathbf{w}_k$ Fourier-Entwicklung von $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

(4.26) Sei $W \subset \mathbb{C}^N$ ein Vektorraum. Dann existiert eine lineare Abbildung $P \colon \mathbb{C}^N \to W$ mit $\big(\mathbf{x} - P(\mathbf{x})\big)^H \mathbf{w} = 0$ für $\mathbf{w} \in W$. P heißt *Orthogonal-Projektion*.

4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

(4.27) Eine *Metrik* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0,\infty[$ mit

$(M1)$	$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$	(Definitheit)
$(M2)$	$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$	(Symmetrie)
$(M3)$	$d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$	(Dreiecksungleichung).

(4.28) Sei V ein reeller Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \longrightarrow [0,\infty[$ mit

$(N1)$	$\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$	(Definitheit)
$(N2)$	$\|\alpha\mathbf{v}\| = \lvert\alpha\rvert\,\|\mathbf{v}\|$	(Homogenität)
$(N3)$	$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \le \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$	(Dreiecksungleichung).

(4.29) Jede Norm induziert eine Metrik $d(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$.

(4.30) Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$(S1)$	$\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle \ge 0$ und $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$	(positive Definitheit)
$(S2)$	$\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$	(Symmetrie)
$(S3)$	$\langle\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = \alpha\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \beta\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle$	(Bilinearität).

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *Euklidischer Vektorraum*.

(4.31) Jedes Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$. Dann gilt:

a) $\lvert\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\rvert \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|$ und $\lvert\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\rvert = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \iff$ $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig.

b) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2(\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

c) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ (Minkowski-Ungleichung)

d) $\langle v,w\rangle = 0 \iff \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ (Satz des Pytagoras).

4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

(4.32) Sei V ein euklidischer Vektorraum.

Zu $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, $\mathbf{v},\mathbf{w} \neq 0$ existiert genau ein Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ mit $\cos(\varphi) = \dfrac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} \in [-1,1]$.

(4.33) Eine Norm ist genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammgleichung gilt. Dann gilt: $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2\right)$.

(4.34) Sei V ein euklidischer Vektorraum.

a) $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ heißen *orthogonal* ($\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$), falls $\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0$.
b) $X \subset V$ und $Y \subset V$ heißen orthogonal, wenn $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = 0$ für alle $\mathbf{x} \in X$ und $\mathbf{y} \in Y$
c) $X^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in X\}$ heißt *orthogonales Komplement*.

(4.35) $X^\perp$ ist Unterraum von V.

(4.36) Sei W Unterraum von einem euklidischen Vektorraum V. Dann ist $V = W + W^\perp$ eine direkte Summe, d.h. zu jedem V existiert genau ein $\mathbf{w} \in W$ und ein $\mathbf{w}^\perp \in W^\perp$ mit $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp$, und es existiert eine Orthogonalprojektion $P\colon V \to W$ mit $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$, $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{v} - P\mathbf{v}$.
Es gilt $W \cap W^\perp = \{0\}$.

(4.37) Für eine Teilmenge $U \subset V$ gilt: $(U^\perp)^\perp = \operatorname{span} U$, und falls U Unterraum, gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

4 Lineare Abbildungen – Euklidische Vektorräume

(4.38) Für die Orthogonalprojektion $P\colon V \to W$ gilt:
zu $\mathbf{v} \in V$ ist $P(\mathbf{v})$ die Bestapproximation von $\mathbf{v}$ in W, d.h. $\|\mathbf{v} - P(\mathbf{v})\| = \min_{\mathbf{w} \in W} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$.

(4.39) Eine lineare Abbildung $P\colon V \to V$ ist genau dann eine orthogonale Projektion auf $W =$ Bild (P), wenn $P \circ P = P$ und $\langle P(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, P(\mathbf{w})\rangle$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.40) Seien V und W euklidische Vektorräume. Eine lineare Abbildung $T\colon V \to W$ heißt *Isometrie* (längen- und winkelerhaltende Abbildung), falls $\langle \mathbf{v}, T\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ gilt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.41) Für eine Abbildung $T\colon V \longrightarrow W$ ist äquivalent:
a) T Isometrie b) $\|T\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in V$ c) $\|T\mathbf{v} - T\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(4.42) Sei $\dim V = \dim W = n$. Dann gilt: $T\colon V \to W$ ist genau dann Isometrie, wenn
$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ONB von $V \iff \{T\mathbf{v}_1, \ldots, T\mathbf{v}_n\}$ ONB von W.

(4.43) Sei $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N, \|\mathbf{w}\| = 1$. Die Matrix $H = I_N - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ beschreibt die Spiegelung an $\mathbf{w}^\perp$.

(4.44) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
Dann gilt $\mathbf{y} = H\mathbf{x}$ für die Spiegelung $H = I_n - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ mit $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$.