Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Mathematik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

10. Übungsblatt vom 17. Dezember 2012

Aufgabe 37: (mündlich) (8 Punkte)

(a) Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien

$$\operatorname{Kern}(T) = \{v \in V \mid Tv = 0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}(T) = \{w \in W \mid \exists v \in V\colon Tv = w\}.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern}(T)$ ein Unterraum von V und $\operatorname{Bild}(T)$ ein Unterraum von W ist.

(b) Es seien V, W, Z Vektorräume und $T\colon V \to W$ und $Q\colon W \to Z$ Isomorphismen. Zeigen Sie, dass $Q \circ T\colon V \to Z$ mit $(Q \circ T)(v) = Q(Tv)$ ebenfalls ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 38: (schriftlich) (8 Punkte)

(a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, soweit möglich, AB, BA, $BA^\top$, AC, CA, $ACB^\top$.

(b) Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

den Ausdruck $(3A + iB^*)^*$.

Aufgabe 39: (schriftlich) (8 Punkte)

(a) Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ habe die Eigenschaft $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq j \leq n$. Zeigen Sie:

$$A^n = 0.$$

(b) Benutzen Sie (a), um B^{20} für die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zu berechnen.

Aufgabe 40: (mündlich) (6 Punkte)
In der Praxis (zum Beispiel bei Karten in der Geographie) ist nicht nur die Wahl einer Basis, sondern auch die Wahl des Koordinatenursprungs wichtig. So sind etwa die vier Punkte

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Ecken eines Parallelogramms. Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ so, dass für die Abbildung $F(x) = Ax + b$ gilt

$$F(0) = p_1, \quad F(e_1) = p_2, \quad F(e_2) = p_3 \quad \text{und} \quad F(e_1 + e_2) = p_4,$$

wobei $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ die Einheitsvektoren sind.

Aufgabe 41: (schriftlich) (6 Bonus- Punkte)

> Drei Weihnachtsmänner aus Schweden fahren mit ihren Rentierschlitten und einem Berg von Geschenken durch die verschneite Winterlandschaft. Während der Rast in einem Gasthof unterhalten sie sich über den Futterbedarf ihrer Tiere in den Sommermonaten. Dabei hat Weihnachtsmann A folgendes Fressverhalten beobachtet: Seine beiden Rentiere fressen in acht Tagen eine $300m^2$ große Wiese kahl. Weihnachtsmann B hat eine ähnliche Beobachtung gemacht. Er hat festgestellt, dass seine insgesamt fünf Rentiere in sechs Tagen $600m^2$ kahlfressen. Weihnachtsmann C, der jüngste und unerfahrenste von den dreien, wird nachdenklich. Er teilt sich eine Weide von $1200m^2$ mit einem Kollegen und sie haben dort elf Rentiere stehen. Nun überlegt er, in wieviel Tagen die Weide abgegrast ist.

Helfen Sie Weihnachtsmann C bei der Lösung.

Hinweis:
Verwenden Sie für die Berechnung folgende vereinfachende Annahme:

(i) Die Grasmenge der Wiesen hängt nur von deren Größe ab.
(ii) Jedes Rentier frisst gleichviel Gras.
(iii) Die Wiese wächst gleichmäßig nach, also auch während die Rentiere fressen.

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 07. Januar 2013, 09.30 Uhr** in den mit „Mathematik für Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-G).

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2013 !