Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Mathematik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

13. Übungsblatt vom 21. Januar 2013

Aufgabe 50: (mündlich) (6 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & -13 \\ 3 & 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(i) Berechnen Sie $\det A$.

(ii) Bestimmen Sie $\det(\frac{1}{3}A^5)$ und $\det\big((A^\top)^{-1}A^3A^\top(A^{-1})^5\big)$.

Aufgabe 51: (schriftlich) (5+3 Punkte)

(a) Gegeben sei die Matrix $A_n = \{a_{kl}\}_{1\le k,l\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = l, \\ i, & k = l+1 \text{ und } k = l-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\det A_1 = 1, \quad \det A_2 = 2$$

und

$$\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2} \quad \text{für } n \ge 3\,.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der 3×3-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52: (mündlich) (6 Punkte)
Im $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ y_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es eine lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $T(x_i) = y_i$ für $i = 1,2,3$? Wenn ja, ist diese eindeutig bestimmt?

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} T, \operatorname{Bild} T$ und deren Dimension.

(c) Zeigen Sie, dass $T \circ T = T$ gilt.

Aufgabe 53: (schriftlich) (8 Punkte)
Mit den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sei die lineare Abbildung $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$Tv_1 = w_1 + w_2,\ Tv_2 = w_1 + w_3,\ Tv_3 = w_1 + w_4.$$

Geben Sie die Abbildungsmatrix A von T bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 54: (mündlich) (6 Punkte)
Gegeben sei die Gerade $g = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$. Ferner sei $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die jeden Punkt im $\mathbb{R}^2$ parallel zur y-Achse auf g projiziert.
Zeigen Sie, dass T linear ist, und geben Sie die Matrix A an, die T bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ beschreibt.

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 28. Januar 2013, 09.30 Uhr** in den mit „Mathematik für Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-G).