

Mathematik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

15. Übungsblatt vom 04. Februar 2013

Aufgabe 59: (freiwillig)

Sei $p \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n die Funktionen

$$\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

(a) Skizzieren Sie die Einheitskreise $K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$ für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \infty$.

(b) Sei $p < 1$ und $n \geq 2$. Begründen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ keine Norm auf \mathbb{R}^n ist.

Aufgabe 60: (freiwillig)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite (und symmetrische) Matrix.

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_A := \langle v, Aw \rangle_2 = v^\top Aw$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n definiert ist.

Aufgabe 61: (freiwillig)

Gegeben sei der Untervektorraum des \mathbb{R}^4

$$U = \text{spann} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie eine ONB von U bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts.

Aufgabe 62: (freiwillig)

Im \mathbb{R}^4 , versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt, seien folgende Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von z auf den Unterraum $U = \text{spann}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Keine Abgabe!