Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Mathematik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

3. Übungsblatt vom 29. Oktober 2012

Aufgabe 9: (mündlich) (6 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Urbilder $f^{-1}(\{0,1\})$ und $g^{-1}(\{-3,1,2\})$.

(b) Finden Sie größtmögliche Mengen $D_f, D_g, R_f, R_g \subset \mathbb{R}$, so dass die Funktionen

$$\widetilde{f}\colon D_f \to R_f,\ \widetilde{f}(x) = \sin x \quad \text{und} \quad \widetilde{g}\colon D_g \to R_g,\ \widetilde{g}(x) = \mathrm{e}^x$$

bijektiv sind.

(c) Skizzieren Sie den Graph von $\widetilde{f}$ und $\widetilde{f}^{-1}$ sowie von $\widetilde{g}$ und $\widetilde{g}^{-1}$.

Aufgabe 10: (schriftlich) (8 Punkte)
Wir betrachten die Menge $N = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und die Menge M der ungeraden natürlichen Zahlen, d.h.

$$N = \{0, 1, 2, 3 \dots\} \quad \text{und} \quad M = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}\,.$$

Geben Sie jeweils eine Abbildung von N nach M an, die

(a) injektiv, aber nicht surjektiv,

(b) surjektiv, aber nicht injektiv,

(c) bijektiv

ist. Geben Sie zu der Abbildung in (c) die Umkehrfunktion an.

Aufgabe 11: (mündlich) (8 Punkte)

(a) Sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Abbildung von einer (endlichen oder unendlichen) Menge M in ihre Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und $A := \{a \in M \mid a \notin f(a)\}$. Zeigen Sie: Es gibt kein $m \in M$ mit $f(m) = A$.

(b) Folgern Sie aus dem vorhergehenden, dass es keine surjektiven Abbildungen von $M(\neq \emptyset)$ auf $\mathcal{P}(M)$ geben kann. (Zu diesem Phänomen sagt man auch: $\mathcal{P}(M)$ ist immer *mächtiger* als M.) Stimmt dieses Resultat mit dem überein, was wir für endliche Mengen wissen?

Aufgabe 12: (schriftlich) (8 Punkte)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die *Gaußsche Summenformel*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt die *verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung*

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \,.$$

Abgabe

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 05. November 2012, 09.30 Uhr** in den mit „Mathematik für Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-G).