Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Mathematatik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

4. Übungsblatt vom 05. November 2012

Aufgabe 13: (schriftlich) (3+3+4 Punkte)

(a) Weisen Sie durch direkte Rechnung nach, dass für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} \leq \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \quad \text{für } k = 0, \ldots, m$$

gilt.

(b) Zeigen Sie ebenfalls durch direkte Rechnung: Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, n$ ist

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichungen gelten:

$$2 \leq \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n < 3\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz sowie Teil (a) zum Nachweis der ersten bzw. Teil (b) und die geometrische Summenformel zum Nachweis der zweiten Ungleichung.

Aufgabe 14: (mündlich) (6 Punkte)
Beweisen Sie aus den Körperaxiomen (A1) - (A5) die folgenden Regeln der Bruchrechnung für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$:

(a) $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd}$,

(b) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$,

(c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Aufgabe 15: (schriftlich) (4+2 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a, b \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie die nachfolgenden Aussagen, indem Sie ausschließlich die Axiome (A1) - (A5) eines Körpers und die bis dahin bewiesenen Folgerungen daraus benutzen.

(a) Die Gleichungen $a + x = b$ und $ay = b\,(a \neq 0)$ haben die eindeutigen Lösungen $x = b - a$ und $y = a^{-1}b$. (*Folgerung (F4)*)

(b) $ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$. (*Folgerung (F7)*)

Aufgabe 16: (mündlich) (4 Punkte)
Sei M eine beliebige Menge. Zeigen Sie elementar, dass die Mengeninklusion $\subset$ auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M eine Ordnungsrelation ist, d.h., dass gilt:

(i) $\forall A \in \mathcal{P}(M)\colon A \subset A$ (*Reflexivität*),

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(M)\colon A \subset B \wedge B \subset A \Longrightarrow A = B$ (*Antisymmetrie*),

(iii) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(M)\colon A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (*Transitivität*).

Ist diese Ordnung im Allgemeinen *alternativ*, d.h. gilt für alle $A, B \in \mathcal{P}(M)$ eine der Inklusionen $A \subset B$ oder $B \subset A$?

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 12. November 2012, 09.30 Uhr** in den mit „Mathematik für Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-G).